

# **Modelação da Força de Atrito de um Servomecanismo Pneumático Utilizando o Modelo de LuGre**

Paulo Ricardo de Oliveira Barbosa Pereira

Orientador: Professor Doutor Fernando Gomes de Almeida  
Co-Orientador: Professor Doutor João Pedro Barata da Rocha Falcão Carneiro

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Opção de Automação



Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Departamento de Engenharia Mecânica

Julho de 2013



## RESUMO

---

Os acionamentos pneumáticos apresentam-se como uma tecnologia com ampla gama de aplicação no que toca a cargas e a velocidades de acionamento. Vantagens como a sua boa relação entre potência disponibilizada e dimensão/peso dos atuadores e o baixo custo tornam esta tecnologia apetecível para as mais variadas aplicações industriais. Contudo, estes acionamentos possuem algumas limitações no que toca ao controlo de força e movimento (posicionamento e seguimento de trajetórias), limitações essas associadas às não linearidades resultantes de fatores como a compressibilidade do ar, as características do escoamento nas válvulas e o atrito existente entre os elementos móveis do sistema e os seus elementos de vedação. Assim, torna-se importante o estudo destes fenómenos, por forma a reduzir os seus efeitos e expandir as capacidades desta tecnologia.

Tendo por objetivo a modelação do atrito num servomecanismo pneumático, neste trabalho foi efetuado um estudo alargado acerca do fenómeno do atrito e dos modelos (estáticos e dinâmicos) utilizados para a sua caracterização. Focando especial atenção no modelo de LuGre e nas metodologias de estimação de parâmetros documentadas na literatura, foi possível a elaboração de um conjunto de metodologias, aplicadas ao servossistema pneumático, que conduziram à caracterização do atrito neste sistema, através de um modelo que, para além de captar características de regime permanente do fenómeno, consegue ainda incluir características da dinâmica de pré-deslizamento. Para a validação do modelo encontrado foram realizadas simulações, sendo os resultados destas comparados com os dados experimentais recolhidos. Foi ainda possível ao longo deste trabalho estudar de forma detalhada alguns dos fenómenos do atrito evidenciados pelo sistema pneumático.

**Palavras-Chave:** Acionamento pneumático, Não linearidades, Atrito, Atuador pneumático, Modelação de atrito, Estimação de parâmetros.





# ABSTRACT

---

## **Friction Modelling on a Pneumatic Servo using LuGre Friction Model**

Pneumatic drive appears as a technology with a wide application range of handling loads and actuating rate. The good power to weight/size ratio and the low cost of the equipment make this technology interesting for a variety of industrial applications. Nevertheless, there are some drawbacks on the position and tracking control, related to the non-linear characteristics associated with the air compressibility, flow properties at the pneumatic valves and friction between moving components and seals. Therefore, raises the interest for the study of those phenomena, in order to reduce their effects and improve the capabilities of pneumatic technologies.

Aiming to the friction characterisation of a pneumatic servo, in this thesis a wide study concerning the friction phenomena and regarding static and dynamic models, used to its characterization, have been done. A special focus have been applied on the LuGre friction model and on the procedures used on the literature to estimate the model parameters. This study allowed to the development of some procedures applied to the pneumatic servo. By this mean, the system friction characterization has been done, using a friction model which combines steady state friction properties with the pre-sliding dynamic characteristics. In order to validate the model identified parameters, simulations were implemented and its results compared with experimental data. During this work, it was also possible to highlight, with relative depth, several of the friction phenomena associated with the pneumatic system.

**Keywords:** Pneumatic drive, Nonlinearities, Friction, Pneumatic actuator, Friction modelling, Parameters identification.



## AGRADECIMENTOS

---

A realização desta dissertação não teria sido possível sem a ajuda, apoio e amizade de muitos. Deixo aqui algumas palavras de reconhecimento a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para este trabalho.

Ao meu orientador, Professor Fernando Gomes de Almeida, e ao meu co-orientador, Professor João Pedro Falcão Carneiro, agradeço a oportunidade que me concederam para trabalhar nesta área de engenharia. A incansável disponibilidade, o incentivo, ideias e valiosos conhecimentos que me transmitiram foram fundamentais para a concretização desta dissertação.

Deixo também uma palavra de apreço ao Professor Francisco Freitas, pela forma como acompanhou todos os projetos, com exigência e conselhos sempre oportunos.

A todos os meus companheiros de laboratório, agradeço a curiosidade e críticas apontadas no decorrer do projeto, mas também as conversas e alegrias partilhadas ao longo de um semestre.

Finalmente, deixo o meu profundo agradecimento à minha família e amigos, que me apoiaram e incentivaram em todos os momentos, este trabalho é dedicado a todos vós.



# ÍNDICE DE CONTEÚDOS

---

<b>RESUMO.....</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>iii</b>
<b>AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>v</b>
<b>Índice de Conteúdos .....</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras.....</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de Tabelas .....</b>	<b>xiii</b>
<b>NOMENCLATURA .....</b>	<b>xv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Estrutura da Dissertação .....	3
<b>2 DESCRIÇÃO DA INSTALAÇÃO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>5</b>
2.1 Instalação Experimental .....	5
2.1.1 Sistema Eletropneumático .....	5
2.1.2 Sistema de Controlo e Aquisição de Dados.....	10
2.2 Modelação do Sistema Pneumático.....	12
2.2.1 Modelo Mecânico .....	12
2.2.2 Modelo das Servoválvulas .....	13
2.2.3 Modelo Termodinâmico do Atuador .....	15
<b>3 O ATRITO .....</b>	<b>17</b>
3.1 O Fenómeno do Atrito.....	17

3.2	Comportamentos Observados Experimentalmente .....	20
3.3	Modelos de Atrito .....	23
3.3.1	Modelos Estáticos .....	23
3.3.2	Modelos Dinâmicos.....	28
3.4	Metodologias de Estimação de Parâmetros do Modelo de LuGre.....	34
3.4.1	Parâmetros Estáticos .....	34
3.4.2	Parâmetros Dinâmicos.....	36
<b>4</b>	<b>ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE ATRITO DE LUGRE.....</b>	<b>39</b>
4.1	Parâmetros Estáticos .....	39
4.1.1	Ensaio a Velocidade Constante .....	40
4.1.2	Ensaio de Descolamento.....	45
4.1.3	Representação dos Resultados e Aproximação Numérica .....	49
4.2	Parâmetros Dinâmicos .....	52
4.2.1	Rigidez .....	53
4.2.2	Amortecimento.....	59
<b>5</b>	<b>VALIDAÇÃO .....</b>	<b>61</b>
5.1	Simulações de Descolamento .....	62
5.1.1	Deslocamento de Pré-deslizamento e Força de Descolamento.....	62
5.1.2	Dependência com o Gradiente da Rampa de Força Aplicada .....	64
5.2	Ciclos de Variação da Força Motora em Pré-Deslizamento.....	64
5.2.1	Média da Força Aplicada Aproximadamente Nula.....	65
5.2.2	Força Aplicada Exclusivamente Positiva.....	66
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>69</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>71</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1 - Distribuição de vários tipos de acionamento em função da carga e velocidade (H - Óleo-hidráulica; P - Pneumática; M - Motores elétricos; S - Motor passo-a-passo) [1]. ...	2
Figura 2 - Estrutura comum de um servomecanismo. ....	5
Figura 3 - Unidade de Tratamento de Ar. [3] .....	6
Figura 4 - Representação da servo-válvula FESTO MPYE-5-1/8-HF-010-B. [7] .....	7
Figura 5 - Desenho de conjunto do atuador pneumático [8]. ....	7
Figura 6 - Sistema mecânico (atuador pneumático e carro guiado). ....	8
Figura 7 - Duplo integrador com observador de velocidade. ....	9
Figura 8 - Sistema de aquisição de dados e condicionamento de sinal [5]. ....	11
Figura 9 - Diagrama de blocos representativo do sistema [5]. ....	12
Figura 10 - Representação esquemática dos componentes mecânicos do sistema servopneumático [5]. ....	13
Figura 11 - Representação simplificada da servoválvula de três orifícios [5] .....	14
Figura 12 - Restrição ideal [5] .....	14
Figura 13 - Contacto microscópico entre duas superfícies [13] .....	18
Figura 14 - Contacto entre duas superfícies estáticas [5]. ....	18
Figura 15 - Modelação do contacto entre rugosidades através de molas [5] .....	18
Figura 16 - Regimes de atrito num contacto lubrificado. ....	19
Figura 17 - Regime de filme misto [5]. ....	19
Figura 18 - Regime de filme completo [5]. ....	20

Figura 19 - Comportamento da força de atrito em função do deslocamento [18].	21
Figura 20 - Relação entre a força de atrito (estático) e o tempo de repouso dos corpos [13].	21
Figura 21 - Relação entre a força de descolamento e o gradiente da força externa aplicada [18].	22
Figura 22 - Movimento de pre-sliding [13].	22
Figura 23 – Ciclo de histerese relação com a variação da velocidade [13].	23
Figura 24 - Modelos de atrito clássicos (função da velocidade) [5].	25
Figura 25 - Força de atrito função da velocidade segundo o modelo de Karnopp [5].	27
Figura 26 - Diagrama de blocos para o Modelo de Karnopp.	27
Figura 27 - Relação entre força de atrito e deslocamento dada pelo modelo de Dahl.	28
Figura 28 - Interface entre duas superfícies modeladas por fibras [33].	31
Figura 29 - Fibra representativa da deflexão média.	32
Figura 30 - Curva força de atrito-velocidade definida pelo modelo de LuGre (em regime permanente).	33
Figura 31 - Mapeamento de valores experimentais e curva teórica de força de atrito vs. velocidade [36].	35
Figura 32 - Experiência de identificação dos parâmetros dinâmicos em servomotor DC [34].	36
Figura 33 - Evolução no tempo da posição do carro móvel.	40
Figura 34 - Evolução no tempo da pressão em cada câmara do cilindro.	41
Figura 35 - Evolução no tempo da velocidade do carro móvel.	42
Figura 36 - Evolução da força de atrito com o tempo a velocidade constante.	43
Figura 37 - Mapeamento dos dados experimentais de força de atrito função da velocidade.	44
Figura 38 - Força de descolamento função da rampa de força aplicada ao sistema móvel.	46
Figura 39- Resultados experimentais para a força de descolamento função da pressão média.	47
Figura 40 - Força de descolamento à pressão média de 4bar e com um gradiente de força de $\pm 0,12\text{N/s}$ .	49



Figura 41 - Mapeamento dos resultados experimentais de força de atrito função da velocidade.....	50
Figura 42 - Curvas obtidas por aproximação numérica dos dados experimentais. ....	52
Figura 43- Sobreposição dos sinais dos transdutores de posição. ....	54
Figura 44 - Curva de força vs. deslocamento no movimento de pré-deslizamento (avanço)...	55
Figura 45 - Comportamento da deformada $z$ no intervalo de tempo $[0,T]$ .....	55
Figura 46 - Rigidez aproximada para cada ensaio: a) avanço; b) recuo.....	57
Figura 47 - RMSE relativo a cada ensaio: a) avanço; b) recuo. ....	58
Figura 48 - Sistema de massa móvel utilizado para validação. ....	61
Figura 49 - Diagrama de blocos representativo do sistema móvel.....	62
Figura 50 - Sobreposição de dados experimentais e de simulação para o movimento de pré-deslizamento (avanço).....	63
Figura 51 - Sobreposição de dados experimentais e de simulação para o movimento de pré-deslizamento (recuo). ....	63
Figura 52 - Representação da força de descolamento obtida experimentalmente e via simulação para diferentes gradientes de força aplicada.....	64
Figura 53 - Dados experimentais de força de atrito função do deslocamento.....	65
Figura 54 - Dados de simulação de força de atrito função do deslocamento. ....	66
Figura 55 - Dados experimentais de força de atrito função do deslocamento.....	67
Figura 56 - Dados de simulação de força de atrito função do deslocamento. ....	68



## ÍNDICE DE TABELAS

---

Tabela 1 - Principais Características da servoválvula FESTO MPYE-5-1/8-HF-010-B. ....	7
Tabela 2 - Dimensões do atuador pneumático ASCO® Joucomatic [8]. ....	8
Tabela 3 - Principais Características da válvula reguladora de pressão proporcional Sentronic <sup>D</sup> . ....	10
Tabela 4 - Características elétricas e condicionamento de sinal dos transdutores [5]. ....	11
Tabela 5 - Valores de tensão que equilibram o sistema para cada pressão média. ....	47
Tabela 6 – Valores médios e desvio padrão relativos aos dados experimentais de força de descolamento função da pressão. ....	48
Tabela 7 - Valores de inicialização do algoritmo de aproximação (parâmetros estáticos). ....	51
Tabela 8 - Valores obtidos por aproximação para os parâmetros estáticos. ....	52



# NOMENCLATURA

---

## Definições Gerais e Operadores

Símbolo	Descrição
$\frac{d}{dt}(\bullet), \dot{\bullet}$	Derivada em ordem ao tempo
$\frac{d}{di}(\bullet)$	Derivada em ordem à variável $i$
$\approx$	Aproximadamente igual
$ \bullet $	Valor absoluto
$\hat{\bullet}$	Valor estimado
$\overline{\bullet}$	Valor médio
$\bullet^{-1}$	Matriz ou função inversa
$\bullet^T$	Vetor ou matriz transpostos

## Notação

Símbolo	Descrição	Unidades
$A_A, A_B$	Área das câmaras A e B	$\text{m}^2$
$A_H$	Área da haste	$\text{m}^2$

Símbolo	Descrição	Unidades
$D_e$	Diâmetro do Êmbolo	m
$D_h$	Diâmetro da Haste	m
$F$	Força	N
$F_A, F_B$	Força pneumática na câmara A e B do cilindro	N
$F_{atm}$	Força devida à pressão atmosférica a atuar na haste do cilindro	N
$F_{atr}$	Força de atrito	N
$F_{Cb}$	Força de atrito de Coulomb	N
$F_{ext}$	Forças exteriores ao sistema	N
$F_m$	Força motora no cilindro	N
$F_N$	Força normal	N
$F_S$	Força de atrito estático	N
$F_V$	Força de atrito viscoso	N
$k_{obs}$	Ganho do observador de velocidade	s <sup>-1</sup>
$L$	Curso do Cilindro	m
$M$	Massa total deslocada pelo atuador do sistema	kg
$\dot{m}$	Caudal mássico de ar	kg s <sup>-1</sup>
$N$	Número de fibras	
$P$	Pressão absoluta dentro da câmara do atuador	bar
$P_{atm}$	Pressão atmosférica absoluta	bar
$P_S$	Pressão absoluta de alimentação	bar
$v_c$	Velocidade de transição do amortecimento das fibras	ms <sup>-1</sup>

Símbolo	Descrição	Unidades
$v_s$	Velocidade de Stribeck	$\text{ms}^{-1}$
$x$	Posição do conjunto móvel	m
$\dot{x}$	Velocidade do conjunto móvel	$\text{ms}^{-1}$
$\ddot{x}$	Aceleração do conjunto móvel	$\text{ms}^{-2}$
$z$	Deflexão média das fibras	m
$\alpha_0$	Força de atrito de Coulomb	N
$\alpha_1$	Força de Stribeck	N
$\alpha_2$	Coeficiente de atrito viscoso	$\text{Nsm}^{-1}$
$\zeta$	Razão de amortecimento	
$\mu_D$	Coeficiente de atrito dinâmico	
$\mu_s$	Coeficiente de atrito estático	
$\mu_v$	Coeficiente de atrito viscoso	$\text{Nsm}^{-1}$
$\sigma_0$	Rigidez das fibras	$\text{Nm}^{-1}$
$\sigma_1$	Amortecimento das fibras	$\text{Nsm}^{-1}$
$\sigma_1(\dot{x})$	Coeficiente de amortecimento dependente da velocidade	$\text{Nsm}^{-1}$
$\sigma_1'$	Coeficiente de amortecimento em pré-deslizamento	$\text{Nsm}^{-1}$





# 1 INTRODUÇÃO

---

Atualmente no meio industrial são utilizadas três grandes tecnologias de acionamento: a pneumática, a óleo-hidráulica e a eletromecânica. A distinção e seleção entre as três tecnologias é efetuada tendo em conta as gamas de aplicação em termos de capacidade de carga e velocidade de atuação, necessidades e facilidade de implementação ao nível do ambiente de trabalho, requisitos de manutenção, relação entre peso/volume e potência dos atuadores e sistemas de transmissão, disponibilidade da fonte de energia utilizada bem como custos associados à aquisição dos equipamentos. Assim, os sistemas de acionamento óleo-hidráulicos são indicados para acionamento de cargas elevadas e tipicamente em gamas de velocidade baixa. Já os atuadores eletromecânicos e pneumáticos, apesar de indicados para aplicações de baixa a média carga, conseguem velocidades de acionamento mais elevadas. A Figura 1 apresenta um mapeamento de vários meios de acionamento de acordo com a sua gama de utilização em termos de carga e velocidade de acionamento [1].

Os acionamentos pneumáticos apresentam-se assim como uma tecnologia abrangente na sua gama de aplicação, quer ao nível da carga, quer da velocidade de acionamento. Apresentam ainda muitas outras vantagens, nomeadamente a total disponibilidade de fluido de trabalho (apesar da necessidade de compressão e filtragem), a baixa dimensão dos atuadores quando comparada com a potência que disponibilizam, a disponibilidade e o baixo custo dos equipamentos [1-3]. O facto de o fluido de trabalho ser o ar, não representando um risco de contaminação, torna os acionamentos pneumáticos muito atrativos para aplicações industriais, especialmente aquelas onde são exigidos cuidados ao nível do ambiente como a indústria alimentar e farmacêutica [3, 4]. A utilização de acionamentos pneumáticos pode ainda ser uma mais-valia para indústrias onde existe risco de explosão, sendo perigosa a utilização de equipamentos elétricos, como é o caso da indústria petroquímica e da indústria mineira [3].

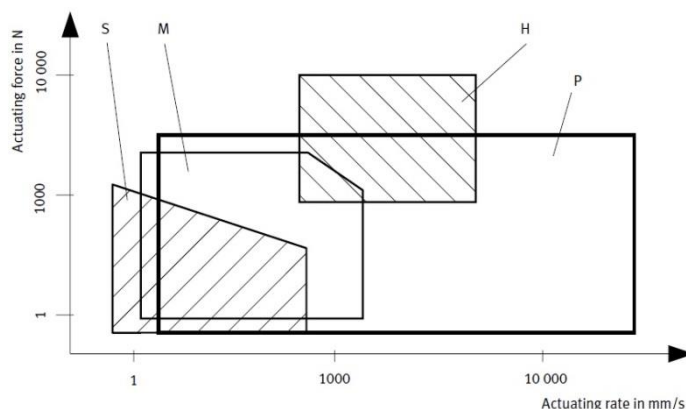


Figura 1 - Distribuição de vários tipos de acionamento em função da carga e velocidade (H - Óleo-hidráulica; P - Pneumática; M - Motores elétricos; S - Motor passo-a-passo) [1].

Contudo, apesar das vantagens enunciadas, os sistemas de acionamento pneumático apresentam uma desvantagem relacionada com a capacidade de posicionamento e seguimento de trajetórias [5]. Enquanto nos sistemas elétricos é relativamente simples efetuar o posicionamento arbitrário e seguimento de trajetórias, mesmo que sob carga variável, no caso dos sistemas pneumáticos esta tarefa é bastante mais complicada, sendo a precisão de posicionamento dependente da carga do atuador [4, 5]. Este facto está relacionado com as características marcadamente não lineares dos sistemas pneumáticos, designadamente no que diz respeito ao atrito entre os componentes móveis do sistema e seus elementos de vedação, às características do escoamento nas válvulas e à compressibilidade do ar [2, 3, 5]. Os acionamentos pneumáticos são ainda caracterizados por uma elevada sensibilidade à carga transportada [2]. Por este motivo, a maioria das aplicações deste tipo de acionamento em ambiente industrial limita-se ao posicionamento de cargas entre pontos fixos, normalmente coincidentes com os extremos do curso dos atuadores [1].

Recentemente, o grande desenvolvimento dos circuitos integrados, com o aumento da capacidade de cálculo dos processadores e a redução do seu preço, tem permitido uma abordagem mais efetiva e precisa à servopneumática, com a utilização de algoritmos de controlo avançados [6]. Assim, muitos fabricantes de componentes pneumáticos já disponibilizam aplicações na área da servopneumática, havendo contudo amplo espaço para estudos que permitam melhorar a modelação e controlo deste tipo de sistemas [6]. Revela-se assim importante o estudo dos fenómenos não lineares associados aos sistemas pneumáticos, sendo portanto necessário, para além do estudo e modelação das características dinâmicas das válvulas e atuadores, a caracterização da força de atrito desenvolvida nos pontos de contacto dos elementos móveis. Quanto melhor a capacidade do modelo de atrito utilizado para descrever este fenómeno, melhor será o resultado ao nível da caracterização do atuador [2].

Na literatura encontram-se diversos modelos de atrito que descrevem de forma mais ou menos detalhada e precisa os fenómenos associados ao atrito. A seleção de um modelo de atrito prende-se então, com o grau de detalhe que se pretende na caracterização do fenómeno e, também, com a

natureza do sistema em estudo [2]. Selecionado o modelo de atrito, é ainda necessário um estudo detalhado sobre as metodologias utilizadas para a estimação de parâmetros, havendo possibilidade para ajuste das metodologias já existentes ou para síntese de novas metodologias, de acordo com a aplicação em estudo.

Relativamente ao sistema servopneumático que é objeto de estudo nesta dissertação, este foi já alvo de diversos estudos relativos à sua modelação e controlo. Nomeadamente no que toca à modelação de atrito, foram já efetuados estudos de caracterização de atrito apresentados por Falcão Carneiro (2007) [5] e também por Rocha (2010) [2]. Nestes estudos a força de atrito foi modelada utilizando o modelo de atrito estático de Karnopp, sendo que o segundo se foca essencialmente no estudo e desenvolvimento de metodologias de estimação para este modelo de atrito. Contudo, dadas as características deste modelo (estático), torna-se necessário o estudo de novos modelos de atrito, concretamente o estudo e implementação de modelos de atrito que permitam caracterizar as dinâmicas de atrito características de velocidades em torno da velocidade nula. Neste contexto surge a presente dissertação que tem por objetivo a modelação de força de atrito através de um modelo de atrito dinâmico, o modelo de atrito de LuGre. Para além desta caracterização, neste trabalho pretende-se ainda efetuar uma revisão das metodologias de estimação referenciadas na literatura, com vista a seleção e/ou adaptação das mesmas ao caso em estudo. No ponto seguinte será então apresentada a estrutura desta dissertação.

## 1.1 Estrutura da Dissertação

Como foi já referido nos parágrafos anteriores, esta dissertação foca-se no estudo do atrito num servossistema pneumático. Para isso foi efetuada uma pesquisa alargada sobre modelos de atrito, e mais concretamente um estudo do modelo de atrito de LuGre, bem como o estudo e síntese de metodologias de estimação de parâmetros para este modelo, vocacionadas para a caracterização do atrito no servossistema pneumático. Assim, esta dissertação divide-se em seis capítulos que tentam espelhar o trabalho desenvolvido.

No **Capítulo 2** é apresentada uma descrição da instalação experimental que constitui a base de estudo. É feita uma caracterização do *setup* experimental disponível bem como uma síntese da modelação do servossistema, resultado dos estudos efetuados em trabalhos anteriores.

O **Capítulo 3** trata a revisão bibliográfica acerca do fenómeno do atrito. Inicialmente é apresentada uma perspetiva histórica acerca do estudo do fenómeno do atrito e mecanismos a ele associados, sendo também documentados comportamentos evidenciados experimentalmente e relatados na literatura. Num terceiro ponto são expostos vários modelos de atrito desde os modelos estáticos clássicos a evoluções de modelos dinâmicos de atrito, até ao modelo de atrito de LuGre. Por fim são compiladas e analisadas as metodologias de estimação de parâmetros do modelo de LuGre, referenciadas na literatura.

Relativamente ao **Capítulo 4**, neste são documentados os procedimentos experimentais e metodologias de aproximação utilizadas para a estimação dos parâmetros do modelo de LuGre, aplicado ao servossistema pneumático em análise. Ao longo deste capítulo vão sendo apresentados os problemas encontrados e dependências observadas experimentalmente, sendo apresentadas as simplificações assumidas. Em cada secção é ainda feita uma discussão acerca dos resultados obtidos, sendo daí retiradas as devidas conclusões.

Finalmente, o **Capítulo 5** desta dissertação inclui um conjunto de comparações entre os resultados de simulações do modelo, com os parâmetros identificados, e ensaios experimentais realizados. Estas comparações têm como objetivo a validação dos parâmetros encontrados bem como a verificação das capacidades do modelo para incluir fenómenos observados experimentalmente.

## 2 DESCRIÇÃO DA INSTALAÇÃO EXPERIMENTAL

---

À semelhança da maioria dos servomecanismos, os sistemas servopneumáticos são de forma geral representados por quatro grandes blocos, como evidencia a Figura 2. O bloco do controlador é responsável pela ação de controlo, determinada em função do erro relativo à referência estabelecida, sendo a função deste elemento normalmente desempenhada por um circuito eletrónico dedicado ou um computador com *software* desenvolvido para o efeito. O bloco de amplificação de potência converte um sinal de baixa potência (saída do controlador) num sinal de média/elevada potência; no caso dos sistemas servopneumáticos esta função é desempenhada pelas servoválvulas. O bloco de atuadores é responsável pela conversão do sinal de potência numa grandeza mecânica como força, binário, posição, velocidade ou aceleração. No caso dos sistemas pneumáticos este bloco é constituído por um ou mais atuadores. Finalmente, o bloco de transdutores representa a instrumentação presente nos servomecanismos e é responsável pela conversão das grandezas físicas, em grandezas inteligíveis para o controlador.

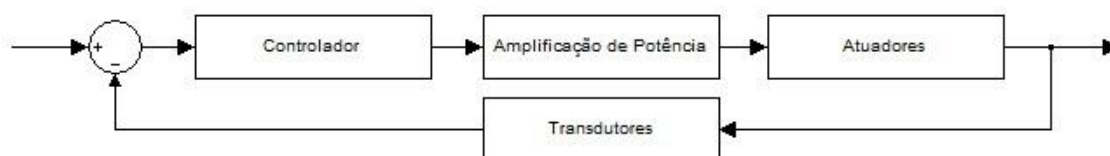


Figura 2 - Estrutura comum de um servomecanismo.

### 2.1 Instalação Experimental

#### 2.1.1 Sistema Eletropneumático

O sistema electropneumático utilizado neste trabalho é constituído essencialmente por uma unidade de tratamento de ar, servoválvulas, um atuador pneumático ao qual está acoplado um carro guiado e, por fim, transdutores ou observadores das variáveis de estado. Nos próximos parágrafos será

apresentada uma descrição detalhada de todos os constituintes deste sistema assim como componentes que foram pontualmente utilizados neste trabalho.

#### 2.1.1.1 Unidade de Tratamento de Ar

A instalação pneumática é alimentada a partir da rede de distribuição de ar comprimido que garante uma pressão máxima de 10 bar (absoluto) [5]. Na entrada da instalação existe uma válvula redutora de pressão regulável, sendo a pressão usualmente utilizada neste tipo de trabalhos da ordem de 7 bar (absoluto). Para além da regulação de pressão, esta unidade possui dois andares de filtragem, de 40  $\mu\text{m}$  e 5  $\mu\text{m}$  [2, 3, 5]. De modo a evitar flutuações significativas de pressão com as oscilações da rede, a instalação possui um reservatório de pressão (acumulador) de 5 litros. Por fim, na extremidade do que se considera a unidade FR (filtragem e regulação) existe uma válvula de corte da alimentação ao circuito. Na Figura 3 apresenta-se esquematicamente a unidade de tratamento de ar onde se inclui cada um dos seus componentes.

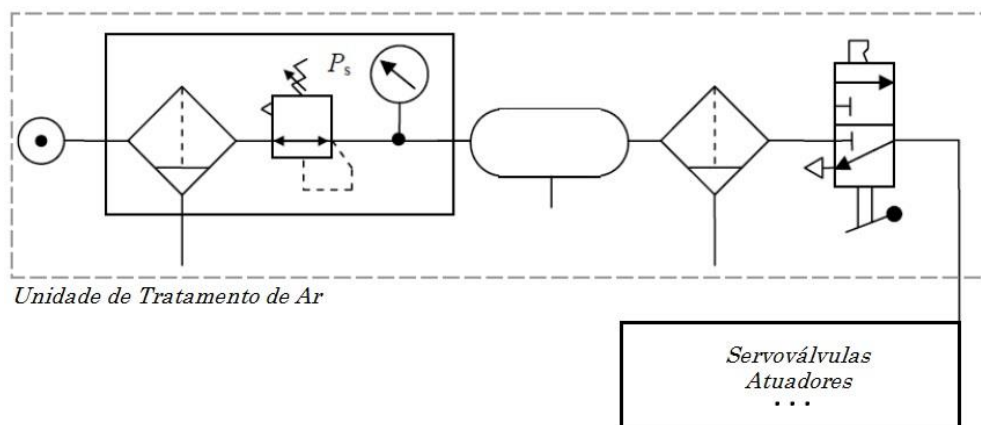


Figura 3 - Unidade de Tratamento de Ar. [3]

#### 2.1.1.2 Servoválvulas

O controlo do cilindro pneumático de duplo efeito é assegurado por duas válvulas direcionais proporcionais, deste modo é possível controlar de forma independente o caudal em cada câmara do cilindro [5]. As válvulas utilizadas têm a referência *MPYE-5-1/8-HF-010-B* e são fabricadas pela *FESTO*, sendo a sua representação esquemática apresentada na Figura 4. Estas são válvulas de cinco orifícios, três posições e centro fechado, e possuem ainda realimentação interna da posição da gaveta, não sendo este sinal acessível ao utilizador.

Na Tabela 1 apresentam-se as características mais relevantes destas válvulas, retiradas do catálogo do fabricante. Uma vez que o controlo de cada câmara requer uma válvula de apenas três orifícios, os orifícios 4 e 5 das válvulas utilizadas foram obturados, sendo as válvulas consideradas como de três orifícios.

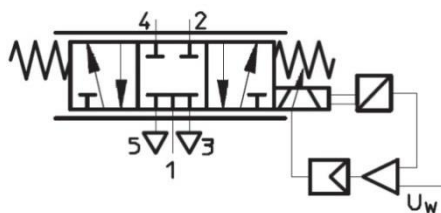


Figura 4 - Representação da servo-válvula FESTO MPYE-5-1/8-HF-010-B. [7]

Tabela 1 - Principais Características da servoválvula FESTO MPYE-5-1/8-HF-010-B.

Característica	Valor
Pressão Máxima Admissível	10 bar
Tensão de Alimentação	24 V
Caudal Nominal	700 SLPM
Largura de Banda	100 Hz
Tensão de Referência	0-10 V

### 2.1.1.3 Atuador Pneumático

O atuador pneumático e o carro guiado constituem o denominado sistema mecânico, apresentado na Figura 6. Este sistema inclui um atuador pneumático industrial de duplo efeito assimétrico, fabricado pela ASCO® *Joucomatic*, com vedantes de baixo atrito do tipo “Omega” e amortecimento interno pneumático regulável [8]. Na Figura 5 apresenta-se o desenho de conjunto do atuador, retirado do catálogo do fabricante. As suas dimensões são apresentadas na Tabela 2.

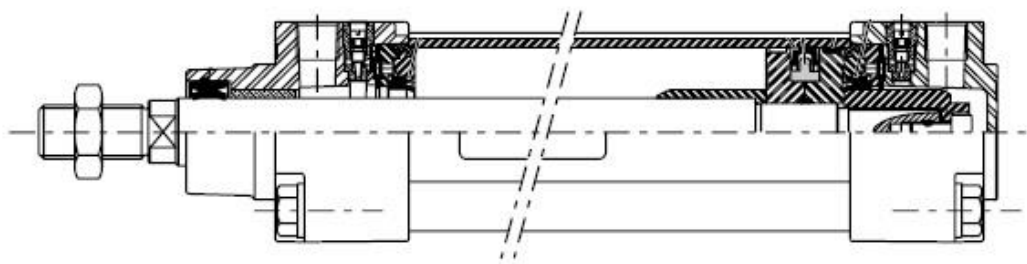


Figura 5 - Desenho de conjunto do atuador pneumático [8].

## DESCRIÇÃO DA INSTALAÇÃO EXPERIMENTAL

*Tabela 2 - Dimensões do atuador pneumático ASCO® Joucomatic [8].*

Característica	Variável	Valor
Diâmetro do Êmbolo	$D_e$	0,032 m
Diâmetro da Haste	$D_h$	0,012 m
Curso do Cilindro	$L$	0,4 m
Área da Câmara A	$A_A$	$8,04 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Área da Câmara B	$A_B$	$6,91 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Área da Haste	$A_H$	$1,13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

Acoplado à haste do atuador pneumático encontra-se o carro que se move numa calha guia sobre um patim de esferas. O sistema possui uma massa móvel mínima de 2,86 kg e máxima de 13,18 kg, valores estimados através do projeto do sistema e validados experimentalmente em [5]. A ligação entre o atuador e o carro é rígida pelo que a posição deste corresponde à posição do êmbolo do cilindro, sendo representada pela variável  $x$ . A origem do referencial de posição corresponde à posição central do êmbolo do cilindro, estando portanto  $x$  compreendido no intervalo de  $\left[-L/2; L/2\right]$  m.



*Figura 6 - Sistema mecânico (atuador pneumático e carro guiado).*

### 2.1.1.4 Transdutores e Observadores das Variáveis de Estado

De modo a que a leitura das variáveis de estado seja efetuada, o sistema está instrumentado com um conjunto de transdutores de posição, pressão e aceleração. Uma vez que o trabalho realizado requer o conhecimento da velocidade, é ainda utilizado um observador de velocidade.

Para a medição da posição do carro móvel é utilizado um transdutor de posição do tipo *encoder* incremental, de princípio de funcionamento magnético, fabricado pela *Bosch/Rexroth*. Este transdutor é constituído por uma régua codificadora inscrita na guia e um bloco de leitura que se desloca com o



patim do carro móvel, possuindo uma resolução de 5  $\mu\text{m}$  e sendo capaz de efetuar leituras até à velocidade máxima de 5  $\text{ms}^{-1}$ , possuindo uma interface segundo a norma RS422.

Na entrada de cada câmara do cilindro pneumático o sistema possui transdutores de pressão PTX 1400 do fabricante *Druck*. Estes transdutores possuem uma gama de medição de 0 a 10 bar com uma exatidão de 0,2 % FS, disponibilizando na sua saída um sinal de corrente entre 4 e 20 mA.

O sistema está ainda instrumentado com um acelerómetro do fabricante *FGP*, modelo FA101 A2  $\pm 50$  LCI, acoplado ao carro móvel. Este acelerómetro permite leituras até aos 50 G em ambos os sentidos de movimento com uma exatidão de 0,1 % FS, disponibilizando à sua saída um sinal em tensão de  $\pm 5$  V.

Dada a necessidade de informação relativa à velocidade do êmbolo do cilindro para a caracterização da força de atrito, esta será estimada com base na informação de posição e aceleração disponibilizadas pelos respetivos transdutores. Para este efeito será implementado um observador de velocidade de ordem reduzida, estudado por Rodrigues Quintas (1999) [9] e utilizado por Mendes Lopes (1999) [10]. Considera-se o sistema como um duplo integrador, sendo o sinal de posição e aceleração as entradas do observador de velocidade como apresentado na Figura 7. Assim, o sistema é definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{x} \quad (1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Sendo a velocidade estimada dada por:

$$\hat{\dot{x}} = \hat{\mu} + k_{obs} \cdot x \quad (3)$$

$$\dot{\hat{\mu}} = -k_{obs} \hat{\mu} - k_{obs}^2 x + \ddot{x} \quad (4)$$

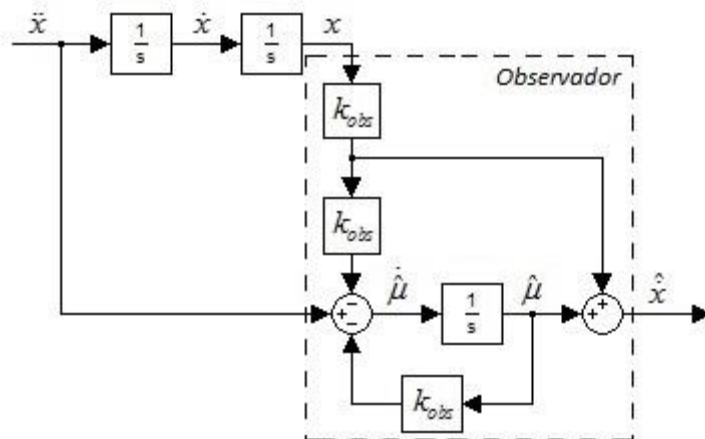


Figura 7 - Duplo integrador com observador de velocidade.

O valor da constante  $k_{obs}$  é dependente do ruído dos sinais de posição e aceleração, devendo ser ajustado experimentalmente de modo a obter a melhor estimativa da velocidade [10]. Neste trabalho será considerado um ganho do observador  $k_{obs}$  de  $30 \text{ s}^{-1}$ , ajustado em trabalhos anteriores e validado com sucesso neste trabalho.

#### 2.1.1.5 Válvulas Reguladoras de Pressão Proporcionais

Por forma a conseguir uma variação linear da pressão em cada câmara do cilindro pneumático, e consequentemente da força motora, foram utilizadas em vários ensaios válvulas reguladoras de pressão proporcionais. As válvulas utilizadas são as *Sentronic<sup>D</sup>*, com a referência *609060111*, do fabricante *ASCO® Joucomatic*. Estas válvulas possuem um ganho de pressão constante na sua gama de pressão. O controlo de pressão é efetuado através de um anel de controlo interno de estrutura PID. A Tabela 3 reúne as principais características deste tipo de válvulas.

Tabela 3 - Principais Características da válvula reguladora de pressão proporcional *Sentronic<sup>D</sup>*.

Característica	Valor
Gama de Pressão	0-6 bar
Pressão Máxima de Alimentação	9 bar
Tensão de Alimentação	24 V
Tensão de Referência	0-10 V
Ganho de Pressão @7bar	0,6 barV <sup>-1</sup>

#### 2.1.2 Sistema de Controlo e Aquisição de Dados

Por forma a implementar o controlo, aquisição e tratamento dos dados experimentais, o sistema servopneumático inclui um computador pessoal (PC) e um quadro elétrico responsável pela alimentação dos transdutores e condicionamento do sinal de saída dos mesmos.

O PC utilizado está equipado com um processador *Intel® Core™ i7* com uma velocidade de relógio de 3,40 GHz. A aquisição dos dados é efetuada através de duas cartas de aquisição com interface *PCI*, ambas do fabricante *Measurement Computing*. A receção e envio de sinais analógicos é conseguida utilizando uma carta *PCI-DAS1602/16* com 8 entradas diferenciais analógicas e 2 saídas, e uma resolução de 16 *bit*. Para receção do sinal do transdutor de deslocamento é utilizada uma carta *PCI-QUAD04* de codificação para *encoders* incrementais.

O controlo do sistema e processamento dos dados provenientes dos transdutores é conseguido através do PC, que possui instalado o *software MATLAB (R2013a)* com a ferramenta *Simulink®*, permitindo a configuração através de *software* das cartas de aquisição, bem como a definição da frequência de amostragem desejada. Este *software* possui ainda a ferramenta *Simulink Coder™*

(anteriormente *Real-Time Workshop*®) que permite gerar e executar código *C* e *C++*, e a ferramenta *Real-Time Windows Target*™ capaz de criar um sistema de tempo real para aquisição e envio de dados. Nos ensaios realizados no âmbito deste trabalho foi utilizada uma frequência de amostragem de 500 Hz.

Visto que o tipo de sinais de saída dos transdutores utilizados é diverso, há a necessidade de efetuar um correto condicionamento de sinal, de forma que, cada uma das saídas possa ser lida pela carta de aquisição e também de forma a utilizar a gama de medição da mesma. A cada um dos sinais é ainda aplicado um filtro de primeira ordem de modo a reduzir o ruído dos mesmos [5]. Assim, entre o PC e sistema a controlar existe um quadro eléctrico que, para além de possuir fontes de tensão DC adequadas a cada um dos transdutores e válvulas, possui ainda um conjunto de placas de condicionamento de sinal adequadas a cada transdutor, exceto o transdutor de posição cuja ligação é feita diretamente à placa de codificação. Na Tabela 4 são apresentadas as características do condicionamento de sinal de cada um dos transdutores, enquanto que, na Figura 8, representa-se esquematicamente o sistema de aquisição de dados e condicionamento de sinal.

Tabela 4 - Características eléctricas e condicionamento de sinal dos transdutores [5].

Transdutor	Sinal de Alimentação	Sinal de Saída	Ganho de	Frequência de Corte
<b>Acelerómetro</b>	$\pm 15$ VDC	$\pm 5$ VDC	2	48 Hz
<b>Transdutores de Pressão</b>	+24 VDC	4 – 20 mA	0,499 V/mA	100 Hz

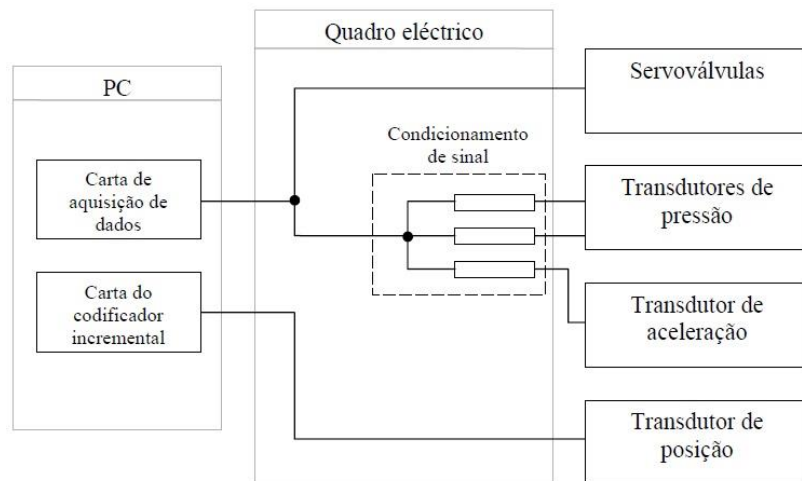


Figura 8 - Sistema de aquisição de dados e condicionamento de sinal [5].

## 2.2 Modelação do Sistema Pneumático

Para se obter um modelo matemático representativo do sistema físico é necessário efetuar a modelação de cada um dos elementos do mesmo, desde os elementos modeladores de caudal (servoválvulas) ao sistema mecânico, passando pelas dinâmicas de pressões e do movimento. O diagrama da Figura 9 representa, sob a forma de blocos, cada um dos constituintes do sistema e a interação entre os mesmos.

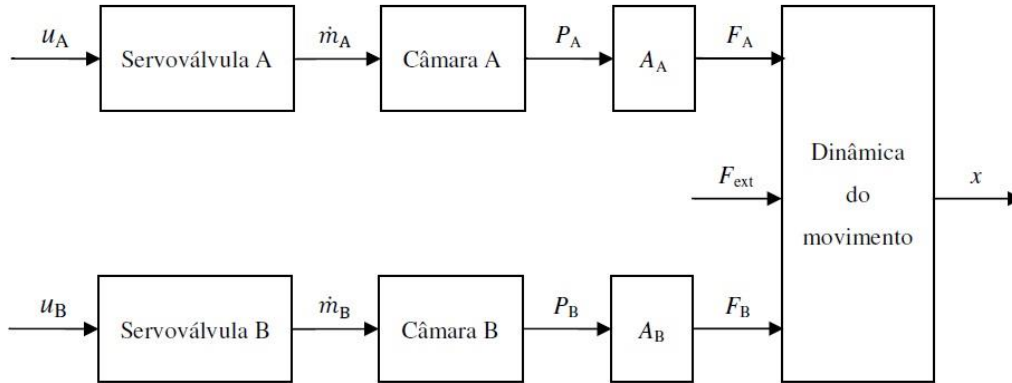


Figura 9 - Diagrama de blocos representativo do sistema [5].

Nos pontos seguintes serão analisados os modelos dinâmicos relativos às servoválvulas e ao atuador. Este último será analisado do ponto de vista mecânico, por aplicação da segunda lei de Newton, e ainda do ponto de vista termodinâmico, pelo estabelecimento da relação entre a pressão e temperatura no interior de cada câmara com os caudais de ar que nela entram ou saem, com o movimento do êmbolo e com a transferência de calor entre o ar e as paredes do cilindro.

### 2.2.1 Modelo Mecânico

De forma a analisar a dinâmica do movimento das partes móveis do sistema (representado esquematicamente na Figura 10) são contabilizadas as diversas forças a atuar sobre a massa móvel  $M$ , nomeadamente as forças devidas às pressões reinantes nas câmaras A e B do cilindro pneumático,  $F_A$  e  $F_B$  respetivamente, a força provocada por ação da pressão atmosférica  $F_{atm}$ , as forças exteriores aplicadas  $F_{ext}$  e a força de atrito  $F_{atr}$  [2, 5]. Uma vez que neste trabalho não se consideram forças exteriores atuantes no sistema, o termo  $F_{ext}$  é igual a zero e não será considerado nas equações que caracterizam o modelo mecânico. Os termos dependentes das pressões são definidos pelas seguintes equações:

$$F_A = P_A \cdot A_A \quad (5)$$

$$F_B = P_B \cdot A_B \quad (6)$$

$$F_{atm} = P_{atm} \cdot A_H \quad (7)$$

Por aplicação da segunda lei de Newton ao sistema móvel tem-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{F_A - F_B - F_{atm} - F_{atr}}{M} \quad (8)$$

Uma vez que as pressões em cada uma das câmaras são medidas experimentalmente, a massa móvel e a pressão atmosférica são conhecidas, resta a força de atrito  $F_{atr}$  que será modelada através do modelo de atrito de LuGre (Secção 3.3.2.4), cujos parâmetros serão alvo de estudo e identificação no presente trabalho.

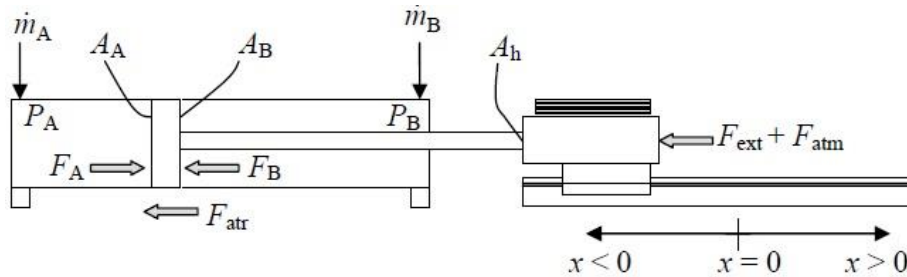


Figura 10 - Representação esquemática dos componentes mecânicos do sistema servopneumático [5].

## 2.2.2 Modelo das Servoválvulas

A caracterização das servoválvulas utilizadas neste trabalho será efetuada por recurso à norma ISO 6358 [11], já utilizada em trabalhos anteriores por Falcão Carneiro [5], Rocha [2] e Amaral [4]. Sendo as servoválvulas utilizadas idênticas, a caracterização será efetuada de forma genérica para a servoválvula A, podendo ser aplicada de forma idêntica à servoválvula B.

Considere-se então a servoválvula genérica de três orifícios representada na Figura 11, onde A ou B corresponde ao orifício de trabalho, ligado à câmara A ou B do cilindro (considerado à pressão da respetiva câmara do cilindro), P o orifício de pressão ligado à fonte de pressão (à pressão  $P_s$ ) e R o orifício de escape ligado à atmosfera (à pressão  $P_{atm}$ ). Com o deslocamento  $x_v$  da gaveta da válvula no interior do corpo da mesma, dependente da tensão de comando da válvula  $u$ , é variada a área das restrições  $R_1$  e  $R_2$ , variando desta forma a quantidade de ar que entra ou sai do cilindro. Tal como referido em [5], é habitual em servopneumática desprezar a dinâmica das servoválvulas, uma vez que esta é muito superior à dinâmica do atuador. No caso em estudo a relação é de 100 Hz (largura de banda das servoválvulas utilizadas) para no máximo cerca de 6 Hz (largura de banda do atuador) [5].

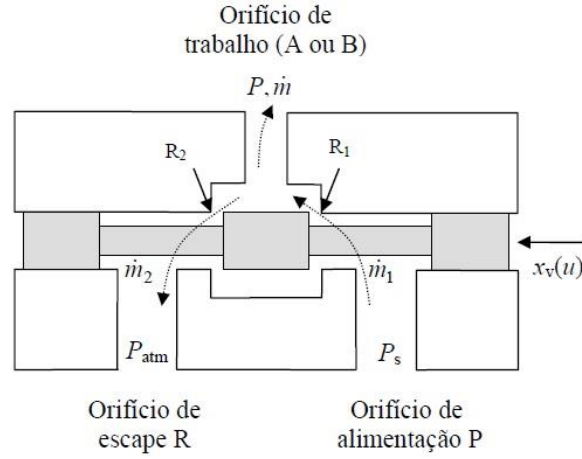


Figura 11 - Representação simplificada da servoválvula de três orifícios [5].

Definindo um volume de controlo que compreende a servoválvula, podemos definir o caudal mássico  $\dot{m}$ , a passar pelo orifício de trabalho, como a diferença entre o caudal  $\dot{m}_1$ , admitido pelo orifício de pressão e que passa pela restrição  $R_1$ , e o caudal  $\dot{m}_2$ , que passa pela restrição  $R_2$  e sai pelo orifício de escape. Esta relação é evidenciada pela equação (9).

$$\dot{m} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad (9)$$

De acordo com o modelo proposto pela norma ISO 6358 [11], o caudal mássico a cruzar uma restrição  $i$  é dado por:

$$\dot{m}_i = C_i(u) \cdot P_{ui} \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{\frac{293.15}{T_{ui}}} \cdot Y_1 \quad (10)$$

onde:

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } P_{di}/P_{ui} \leq r_i(u) \\ \sqrt{1 - \left( \frac{P_{di}/P_{ui} - r_i}{1 - r_i} \right)^2} & \text{se } P_{di}/P_{ui} > r_i(u) \end{cases} \quad (11)$$

Nas equações (10) e (11),  $C_i(u)$  representa a condutância sónica da restrição e  $r_i(u)$  a respetiva razão de pressões crítica, os sufixos "u" e "d" representam o que se passa a montante e a jusante da restrição, conforme evidenciado na Figura 12 representativa de uma restrição ideal [2].

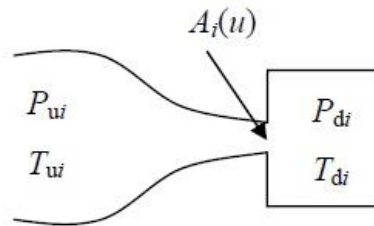


Figura 12 - Restrição ideal [5].

Aplicando o modelo dado pelas equações (10) e (11) a cada uma das servoválvulas e omitindo a dependência de  $C_i$  e  $r_i$  relativamente a  $u$ , obtém-se então o modelo para cada uma das servoválvulas.

Para a servoválvula A:

$$\dot{m}_A = \dot{m}_{A1} - \dot{m}_{A2} \quad (12)$$

com

$$\dot{m}_{A1} = C_{A1} \cdot P_S \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{\frac{293.15}{T_S}} \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } P_A/P_S \leq r_{A1} \\ \sqrt{1 - \left( \frac{P_A/P_S - r_{A1}}{1 - r_{A1}} \right)^2} & \text{se } P_A/P_S > r_{A1} \end{cases} \quad (13)$$

$$\dot{m}_{A2} = C_{A2} \cdot P_A \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{\frac{293.15}{T_A}} \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } P_{atm}/P_A \leq r_{A2} \\ \sqrt{1 - \left( \frac{P_{atm}/P_A - r_{A2}}{1 - r_{A2}} \right)^2} & \text{se } P_{atm}/P_A > r_{A2} \end{cases} \quad (14)$$

Da mesma forma para a servoválvula B:

$$\dot{m}_B = \dot{m}_{B1} - \dot{m}_{B2} \quad (15)$$

com

$$\dot{m}_{B1} = C_{B1} \cdot P_S \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{\frac{293.15}{T_S}} \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } P_B/P_S \leq r_{B1} \\ \sqrt{1 - \left( \frac{P_B/P_S - r_{B1}}{1 - r_{B1}} \right)^2} & \text{se } P_B/P_S > r_{B1} \end{cases} \quad (16)$$

$$\dot{m}_{B2} = C_{B2} \cdot P_B \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{\frac{293.15}{T_B}} \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } P_{atm}/P_B \leq r_{B2} \\ \sqrt{1 - \left( \frac{P_{atm}/P_B - r_{B2}}{1 - r_{B2}} \right)^2} & \text{se } P_{atm}/P_B > r_{B2} \end{cases} \quad (17)$$

### 2.2.3 Modelo Termodinâmico do Atuador

Em [5] é feito um estudo exaustivo sobre o modelo termodinâmico das câmaras de um cilindro pneumático. Primeiro é desenvolvido um modelo teórico baseado no teorema de transporte de Reynolds [12] aplicado a um volume de controlo que compreende todo o ar contido numa câmara pneumática [5]. Este modelo é caracterizado pelas seguintes equações, função das variáveis de estado pressão e temperatura:

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma \frac{P}{V} \frac{dV}{dt} + \gamma \frac{R}{V} \dot{m}_{in} T_{in} - \gamma \frac{R}{V} \dot{m}_{out} T + \frac{(\gamma-1)}{V} \lambda_0 \left( \frac{PT}{P_0 T_0} \right)^{1/2} A_q(x) (T_{amb} - T) \quad (18)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{V} \frac{dV}{dt} (1 - \gamma) + \dot{m}_{in} \frac{RT}{VP} (\gamma T_{in} - T) - \dot{m}_{out} \frac{RT^2}{VP} (\gamma - 1) + \frac{(\gamma - 1)T}{PV} \lambda_0 \left( \frac{PT}{P_0 T_0} \right)^{1/2} A_q(x) (T_{amb} - T) \quad (19)$$

Nas equações acima  $\gamma$  representa a razão de calores específicos do ar,  $R$  a constante específica do ar como gás perfeito,  $P$  e  $V$  a pressão e volume da câmara pneumática em análise,  $A_q$  a área de transferência de calor e  $\lambda_0$  o coeficiente de transferência de calor nas condições de equilíbrio  $P_0$  e  $T_0$  [2]. O caudal mássico ( $\dot{m}_{in}$  e  $\dot{m}_{out}$ ) que entra e sai da câmara pneumática é relacionado com a ação de controlo  $u$  através do modelo da servoválvula [2].

De modo a conhecer o modelo completo das câmaras pneumáticas é ainda necessário conhecer o valor do coeficiente de transferência de calor nas condições de equilíbrio  $\lambda_0$ , valor este apresentado por Falcão Carneiro [5]. De forma a reduzir a ordem do sistema, em [5] o autor analisa ainda vários modelos termodinâmicos de ordem reduzida (MTOR) baseados na aproximação da relação entre as variáveis de temperatura e pressão através de uma evolução politrópica. Dos modelos analisados destaca-se o modelo M7, já utilizado em [4] para controlo linear de um servoatuador pneumático.



## 3 O ATRITO

---

### 3.1 O Fenómeno do Atrito

O atrito é um fenómeno dissipativo presente em todos os sistemas mecânicos como rolamentos, transmissões mecânicas, rodas, travões, e também em cilindros e válvulas hidráulicas e pneumáticas. Este fenómeno acontece na região de contacto entre duas superfícies podendo existir ou não um agente lubrificante entre ambas como massas lubrificantes ou óleos [13]. O resultado deste fenómeno é uma força de reação tangencial às superfícies em contacto que se opõe ao movimento relativo dos corpos [2, 14]. Em muitos casos o aparecimento desta força pode ser desejado, caso dos travões mecânicos, sendo no entanto indesejável noutras situações, o que se verifica no presente caso de estudo e situações onde o atrito conduz a dissipação de energia, bem como a dificuldades ao nível da análise e controlo do sistema [5]. Este é assim um tema que envolve várias áreas do conhecimento como a ciência dos materiais, a mecânica dos fluidos entre outras áreas da ciência e engenharia [13].

Desde o aparecimento dos primeiros sistemas mecânicos que o fenómeno do atrito é estudado. No século XV, Leonardo da Vinci (1519) estudou o deslizamento de blocos retangulares sobre superfícies planas [13-15]. Mais tarde, o físico Guillaume Amonton (1699) [16] concluiu que a força de atrito numa superfície de deslizamento tem uma relação de proporcionalidade com a carga normal a essa superfície, tendo ainda concluído que esta força é independente da área da superfície de contacto, i.e. superfície de contacto aparente. Posteriormente, Charles de Coulomb (1785) [17] chegou à famosa lei de Coulomb que estabelece que depois de iniciado o movimento a força de atrito é independente da velocidade [13, 14].

De modo a compreender o fenómeno do atrito e os modelos usados para a sua caracterização é necessária uma análise do que se passa a nível microscópico, atentando às deformações elásticas e plásticas que se verificam entre as rugosidades das superfícies em contacto [18]. Na Figura 13 encontra-se ilustrado o contacto entre rugosidades superficiais que se deformam quando sujeitas a cargas normais e tangenciais. Resultado da carga normal existente poderão ainda ocorrer processos de adesão ou soldadura localizada entre as superfícies [13].

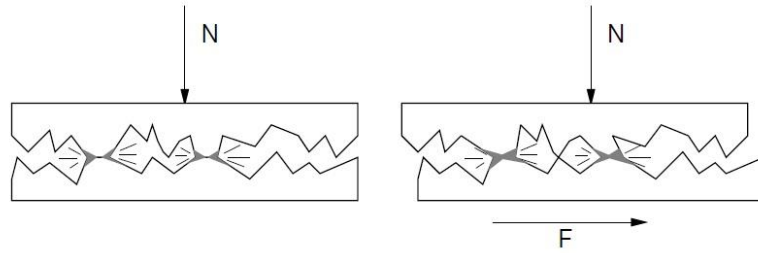


Figura 13 - Contacto microscópico entre duas superfícies [13].

Considerando uma ampliação da Figura 13 pode representar-se esquematicamente os filmes superficiais de cada corpo, representados a tracejado na Figura 14. Estes filmes correspondem a camadas sólidas com uma espessura da ordem de  $10^{-1} \mu\text{m}$  e cuja tensão de corte é inferior à do material do respetivo corpo. No caso dos contactos lubrificados estes filmes são resultado da interação entre o lubrificante e a superfície de cada corpo [5].

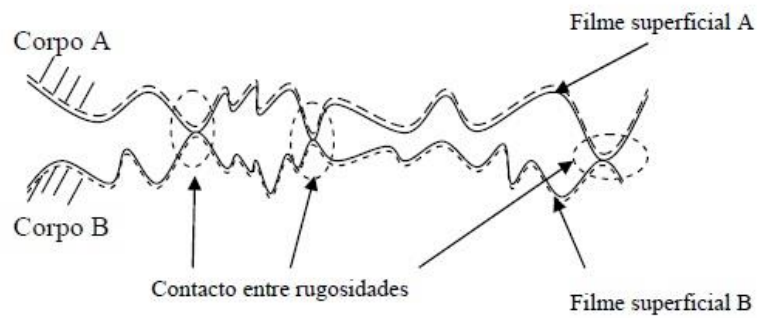


Figura 14 - Contacto entre duas superfícies estáticas [5].

Uma forma de modelar o contacto entre as rugosidades das superfícies é através de molas, como ilustra a Figura 15, cuja rigidez depende da geometria das rugosidades em contacto, da elasticidade do material de cada corpo e da força normal à superfície de deslizamento. Este modelo tem em consideração que a força normal à superfície de contacto é constante, de outro modo seria necessária uma análise mais complexa na medida em que se introduziria uma nova variável no problema [5].

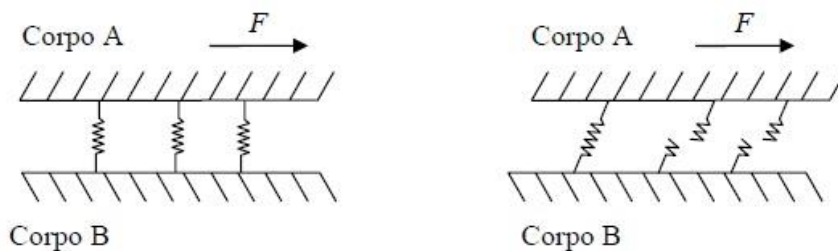


Figura 15 - Modelação do contacto entre rugosidades através de molas [5].

De uma forma geral pode-se dizer que os mecanismos associados ao atrito se dividem em quatro regiões com diferentes comportamentos, como ilustrado na Figura 16, dependentes da velocidade relativa entre as superfícies [13].

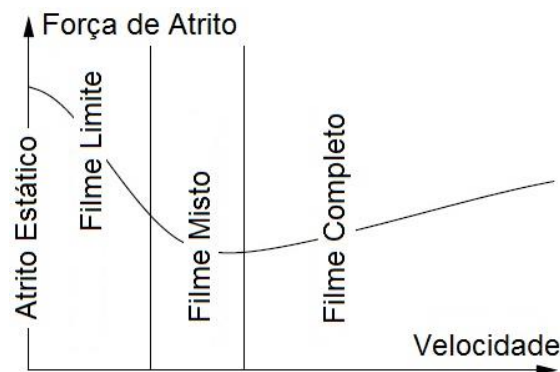


Figura 16 - Regimes de atrito num contacto lubrificado.

O primeiro regime de atrito denominado de atrito estático (do inglês *sticking*) corresponde ao período de adesão das superfícies, ou seja, a fase da solicitação na qual já existe deformação das molas (que modelam as rugosidades) e portanto uma força resultante dessa deformação, denominada força de atrito estático. Nesta fase a força de atrito é devida à deformação elastoplástica dos contactos entre as superfícies [13].

No Segundo regime o contacto entre as superfícies dá-se através dos filmes superficiais e designa-se por filme limite, nesta fase a velocidade relativa entre as superfícies é baixa não permitindo a formação de um filme lubrificado entre os corpos. Assim nesta fase o atrito existente é fortemente dependente dos materiais em contacto e do tipo de lubrificante utilizado, sendo também influenciado pela existência de óxidos e outras impurezas [5, 13].

Com o aumento da velocidade relativa, aumenta a penetração do lubrificante na região de contacto, o que leva ao aumento do espaço entre as superfícies (Figura 17). Este regime de atrito é denominado de filme misto, sendo a força de atrito influenciada por um lado pela viscosidade do lubrificante e por outro pelos contactos ainda existentes entre as rugosidades de ambas as superfícies [13]. Deste facto resulta uma diminuição da força de atrito, abaixo da verificada no regime de filme limite. Este fenómeno é conhecido por efeito de Stribeck [5].

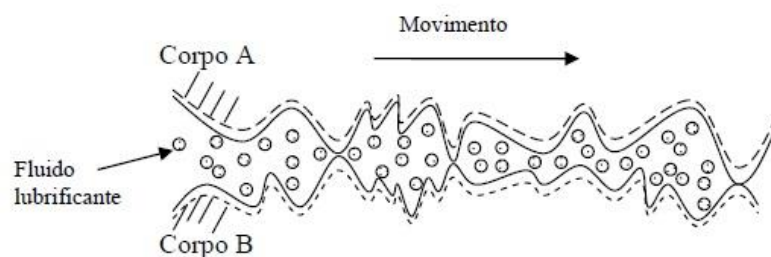


Figura 17 - Regime de filme misto [5].

Finalmente, à medida que aumenta a velocidade, e consequentemente a espessura de filme lubrificante, deixa de existir contacto entre as superfícies (Figura 18), passando assim a força de atrito a ser dominada pelas forças hidrodinâmicas no lubrificante [5, 13]. Este regime de atrito é denominado de filme completo. Sendo as forças de corte no seio de um fluido lubrificante proporcionais à velocidade relativa entre as superfícies que o delimitam [12], a força de atrito passará a ter um comportamento linearmente dependente da velocidade relativa entre os corpos [5].

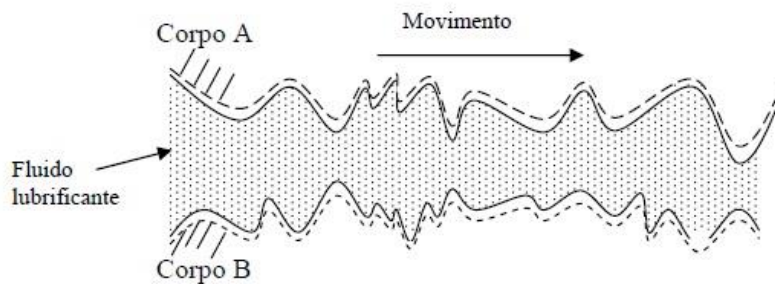


Figura 18 - Regime de filme completo [5].

### 3.2 Comportamentos Observados Experimentalmente

No último século diversas experiências foram levadas a cabo com vista à caracterização dos fenómenos relacionados com o atrito, inicialmente considerando condições ideais, com superfícies limpas e condições estacionárias como velocidade constante [13, 18]. Destas experiências resultou a caracterização do fenómeno do atrito já sintetizada na secção anterior. No entanto não existe uma formulação universal que descreva a força de atrito função da velocidade, pelo contrário esta relação está dependente da aplicação e é influenciada pelas propriedades dos materiais, temperatura e desgaste, entre outros fatores [13]. Mais tarde, com o reconhecimento de que na verdade o atrito é um fenómeno dinâmico, e não apenas dependente da velocidade, foram então realizadas novas experiências com vista à identificação de características e comportamentos dinâmicos relacionados com o atrito, comportamentos esses que não eram observáveis considerando a velocidade constante e que serão brevemente descritos de seguida [13, 14].

Ernest Rabinowicz (1951) [19] apresenta um estudo que relaciona os conceitos de força de atrito estático e força de descolamento, estudando a forma como se dá a transição entre o regime estático de adesão (*sticking*) e o regime cinético (*slip*). A força de atrito estático corresponde à força desenvolvida na interface de contacto, quando ainda não foram quebradas as “ligações” existentes entre as rugosidades das superfícies. Como visto, esta força depende essencialmente das características dos materiais em contacto. A força de descolamento corresponde à força necessária para ultrapassar o atrito estático, ou seja, para que as “ligações” entre as superfícies se quebrem e se inicie o movimento relativo dos corpos. O autor conclui que a transição não pode ser descrita como função da velocidade e em vez disso estudou esta transição como função do deslocamento relativo dos corpos. A experiência

realizada permitiu descrever a transição entre o regime de atrito estático e o início do movimento relativo dos corpos, conforme o gráfico da Figura 19. A força de descolamento corresponde ao máximo da curva apresentada e como se verifica ocorre para pequenos deslocamentos, da ordem de  $1\ \mu\text{m}$  [19].

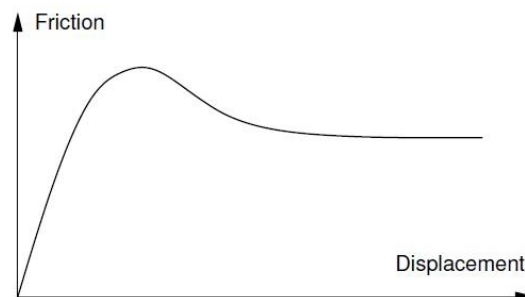


Figura 19 - Comportamento da força de atrito em função do deslocamento [18].

Rabinowicz (1958) [20] descreveu ainda a dependência da força de atrito estático relativamente ao tempo de *dwell*, ou seja, o tempo de repouso dos corpos em contacto. Das experiências realizadas resultaram relações entre os dois parâmetros do tipo da evidenciada na Figura 20, o que sugere uma dependência temporal da força de atrito estático [13]. Posteriormente Johannes *et al.* (1976) [21] concluíram que este fenómeno e o gradiente da força externa aplicada não podem ser separados. A partir do desenvolvimento de novas experiências, com possibilidade de variar o tempo de repouso e o gradiente da força externa aplicada de forma independente, os autores determinaram que não existe dependência entre a força de atrito estático e o tempo de repouso [13].

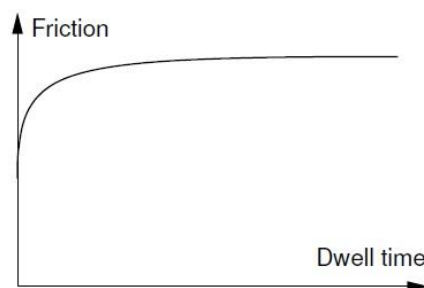


Figura 20 - Relação entre a força de atrito (estático) e o tempo de repouso dos corpos [13]

Os estudos de Johannes *et al.* (1976) [21], e mais tarde de Richardson *et al.* (1976) [22], permitiram ainda afirmar que existe uma dependência da força de descolamento relativamente ao gradiente da força externa aplicada, sugerindo que com o aumento deste gradiente ocorre uma redução da força de descolamento conforme demonstra a Figura 21 [2, 13].

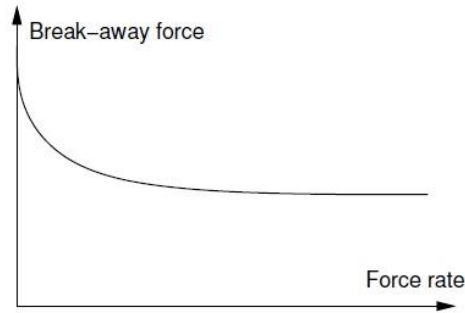


Figura 21 - Relação entre a força de descolamento e o gradiente da força externa aplicada [18].

Ainda no regime de atrito estático, Courtney-Pratt *et al.* (1957) [23] estudaram o comportamento tipo mola neste regime. Verificou-se que, após descarregamento da força aplicada parte do deslocamento sofrido não é recuperado, evidenciando-se assim a deformação existente a nível microscópico. Este comportamento encontra-se representado na Figura 22 onde as linhas a tracejado representam a recuperação elástica das rugosidades da interface. Note-se que, apesar de nesta fase o movimento ainda não se ter iniciado, existe já um deslocamento (microscópico) permanente. Este fenómeno de deslocamento microscópico é referido na bibliografia como movimento de *pre-sliding* [2, 13, 18].

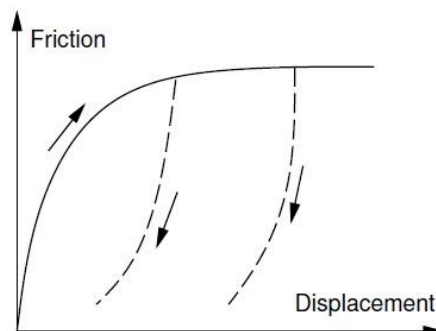


Figura 22 - Movimento de *pre-sliding* [13].

Para além do regime de atrito estático, as dinâmicas do atrito são também importantes nos outros regimes de atrito. Experiências levadas a cabo por Hess *et al.* [24] permitiram verificar a existência de ciclos de histerese, relacionados com variações de velocidade, e abrangendo os regimes de atrito dinâmico. Este comportamento encontra-se representado na Figura 23 onde se pode verificar que a força de atrito é maior para variações positivas de velocidade do que para variações negativas. A dimensão destes ciclos de histerese está relacionada com a carga normal à superfície de deslizamento, a viscosidade do lubrificante e a frequência de variação da velocidade [2, 13, 18].

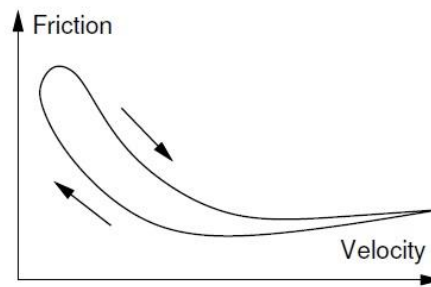


Figura 23 – Ciclo de histerese relação com a variação da velocidade [13].

### 3.3 Modelos de Atrito

Existem diversos modelos de atrito já estudados na bibliografia, modelos estes com diferentes graus de complexidade e que se adaptam a variadas situações, de acordo com os objetivos pretendidos. Assim, existem modelos indicados para a análise matemática e física do fenómeno do atrito, modelos vocacionados para a simulação *off-line* para uma análise comportamental qualitativa ou de alta definição, e ainda a compensação do atrito em controlo. Neste último caso é necessário ter em consideração, na seleção de um modelo, as limitações computacionais existentes [13]. Alguma bibliografia sugere uma divisão dos modelos de atrito em duas categorias: modelos estáticos e modelos dinâmicos. A primeira categoria inclui modelos capazes de fornecer uma caracterização qualitativa dos fenómenos do atrito, suficiente para uma análise global do fenómeno. A segunda categoria já inclui dinâmicas associadas ao atrito, sendo estes modelos capazes de descrever de forma mais precisa o fenómeno [2, 14, 15, 18]. Poder-se-á ainda falar numa terceira categoria de modelos onde se incluem modelos dedicados (*special purpose*) que tratam de forma mais detalhada os fenómenos físicos associados ao atrito [13].

Neste trabalho não se pretende fazer uma análise extensiva de todos os modelos de atrito existentes, serão abordados de forma geral alguns modelos de atrito estáticos e dinâmicos, com especial ênfase para o modelo de atrito de LuGre.

#### 3.3.1 Modelos Estáticos

Como foi já analisado o atrito pode ser descrito por uma função descontínua entre a força de atrito e a velocidade relativa entre os corpos em contacto [13, 15]. Existem então diversos modelos que pretendem modelar cada um dos aspetos relativos à força de atrito [13, 18], como função “estática” da velocidade [13]. Para além dos modelos estáticos clássicos existem ainda modelos estáticos que pretendem adaptar os modelos originais de modo a torná-los mais capazes para aplicações de simulação [13].

### 3.3.1.1 Modelos Clássicos

O modelo de atrito de Coulomb (1785) [17] descreve o atrito como uma força oposta ao movimento e independente da velocidade e da área de contacto [13, 18]. Este modelo é descrito pela seguinte equação.

$$F_{atr}(\dot{x}) = F_{Cb} \cdot \text{sgn}(\dot{x}) = \mu_D \cdot F_N \cdot \text{sgn}(\dot{x}) \quad (20)$$

Onde  $F_{atr}$  representa a força de atrito desenvolvida,  $F_{Cb}$  a força de atrito de Coulomb,  $F_N$  a carga normal,  $\mu_D$  o coeficiente de atrito dinâmico e  $\dot{x}$  a velocidade relativa entre os corpos em contacto. Este modelo de atrito é muito utilizado na compensação de atrito, sendo incluído no *software* de muitas cartas de controlo [14, 15]. Neste modelo a força de atrito é definida como função do sinal da velocidade, não estando o seu valor definido para velocidades nulas, podendo este ser zero ou qualquer outro valor no intervalo  $[-F_{Cb}; F_{Cb}]$  [2, 5, 13, 18]. Este modelo de atrito encontra-se representado na Figura 24 a).

Morin (1833) [25] introduziu a ideia de que existe uma força estática máxima  $F_S$ , força esta que é necessário ultrapassar para que se inicie o movimento e que é superior à força de atrito de Coulomb  $F_{Cb}$ . A força de atrito estático (*stiction*) é então dada pela equação (21) onde  $\mu_S$  representa o coeficiente de atrito estático [15]. Esta é uma forma simplificada de incluir o efeito de Stribeck na modelação do atrito [5]. Contudo este modelo não é capaz de descrever o efeito de mola verificado em torno de velocidades nulas (*pre-sliding*) [14], sendo assim necessária uma alteração para a contemplar. A força de atrito estático pode então ser modelada através da força externa aplicada  $F_e$  (para velocidade nula), sendo que  $-F_S < F_e < F_S$ . No entanto, isto pode conduzir a um problema matemático de indeterminação [13, 14, 18]. A Figura 24 b) ilustra o comportamento da força de atrito em função da velocidade relativa, onde se distingue a força de atrito estático máxima  $F_S$  e a força de atrito de Coulomb  $F_{Cb}$ .

$$F_S = \mu_S \cdot F_N \quad (21)$$

No modelo representado na Figura 24 c), aos modelos já vistos é adicionado o efeito da viscosidade evidenciado no quarto regime de atrito descrito na Figura 16, adicionando à força de atrito de Coulomb um termo que contabiliza a força de atrito viscoso  $F_V$  [5]. Esta força de atrito viscoso é definida como função da velocidade  $\dot{x}$  e do coeficiente de atrito viscoso  $\mu_V$ , como sugere a seguinte equação.

$$F_V = \mu_V \cdot \dot{x} \quad (22)$$

Por fim, o último modelo apresentado na Figura 24 d) representa de uma forma mais completa o já abordado efeito de Stribeck [14]. Estão disponíveis na literatura diversos exemplos que de forma



geral correspondem ao comportamento ilustrado na figura, focando-se a diferença na forma como o fenómeno de Stribeck é modelado [5]. Um exemplo é o mencionado por Åström (1998) [14], onde para velocidades diferentes de zero a força de atrito é dada em função da velocidade pela equação (23), adaptada de [14], e onde  $v_s$  representa a velocidade de Stribeck [13, 18]. O parâmetro  $\delta_s$  deve ser escolhido de forma a que a parametrização se ajuste aos dados experimentais obtidos [13].

$$F_{atr}(\dot{x}) = F_{cb} + (F_s + F_{cb}) \cdot e^{-|\dot{x}/v_s|^{\delta_s}} + \mu_v \cdot \dot{x} \quad (23)$$

Este e outros exemplos de parametrizações possíveis são apresentados por Armstrong-Hélouvry (1991) [26] e revistos na publicação [27]. C. Canudas de Wit (1993) [28] usa ainda a parametrização apresentada na equação (24) adaptada de [13], válida numa gama limitada de velocidades devido ao termo  $-F_d |\dot{x}|^{1/2}$ , representativo do efeito de Stribeck, e que poderá levar a que a força de atrito tenha o sinal errado [13].

$$F_{atr}(\dot{x}) = F_s - F_d |\dot{x}|^{1/2} \quad (24)$$

Note-se que todos os modelos apresentados são capazes de descrever comportamentos assimétricos em função do sinal da velocidade, bastando para isso que os parâmetros  $F_{cb}$ ,  $F_s$  e  $\mu_v$  variem de forma independente para velocidades positivas e negativas [5, 14].

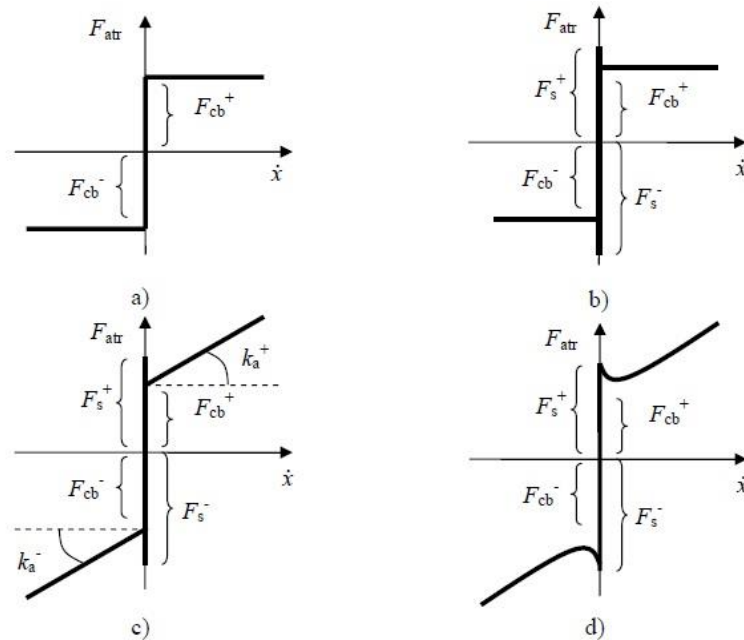


Figura 24 - Modelos de atrito clássicos (função da velocidade) [5].

a) Modelo de atrito de Coulomb; b) Modelo de atrito de Coulomb com força de atrito estático máxima; c) Modelo de atrito com atrito de Coulomb, força de atrito estático máxima e atrito viscoso; d) Modelo de atrito com evolução contínua desde a força de atrito estático máxima.

Apesar de os modelos apresentados na Figura 24, particularmente o modelo d) com a devida parametrização, poderem descrever de forma bastante completa o fenómeno do atrito, estes têm uma limitação relacionada com a deteção ou determinação de quando a velocidade é nula [13, 18]. Como foi já referido para o modelo da Figura 24 b), para velocidades nulas existe o problema da não singularidade, uma vez que a força de atrito se pode situar no intervalo  $[-F_s; F_s]$ ; por outro lado, por definição da função *sin* a força pode tomar um qualquer valor constante dentro do mesmo intervalo [5]. Uma vez que nenhuma destas situações corresponde a um comportamento fisicamente correto, há a necessidade de partir para modelos capazes de contornar este problema, até porque é em torno de velocidades nulas que é útil uma boa modelação de atrito para sistemas de posicionamento, já que a exatidão obtida será tanto melhor quanto maior o conhecimento das condições do sistema em torno da posição final, i.e. velocidade nula ou muito baixa [5].

### 3.3.1.2 Modelo de Karnopp

O modelo desenvolvido por Dean Karnopp (1985) [29] tem como objetivo superar as limitações evidenciadas pelos anteriores modelos para velocidade nula e eliminar a comutação entre a zona de atrito estático (*sticking*) e a zona de deslizamento (*sliding*).

Assim é definido um intervalo de baixa velocidade  $[-\dot{x}_{\min}; \dot{x}_{\min}]$ , considerando-se que dentro deste intervalo (mesmo para velocidades diferentes de zero) a saída do bloco é mantida a zero, criando-se assim uma zona morta onde se considera o sistema parado. Deste modo, se  $|\dot{x}| < \dot{x}_{\min}$  a força de atrito iguala todas as forças aplicadas, mantendo-se o sistema em equilíbrio, ou seja “colado” (*stick*). Fora do intervalo de baixa velocidade o sistema encontra-se “descolado” (*slip*), e a força de atrito é definida por uma função dependente da velocidade, como são exemplo as parametrizações já referenciadas [2, 5, 13, 18]. Deste modo, pode então falar-se numa gama de velocidades em que o sistema se encontra colado, conforme evidencia a Figura 25. Mesmo definindo um intervalo de baixa velocidade de forma grosseira o modelo consegue descrever o fenómeno de *stick-slip* [13, 18].

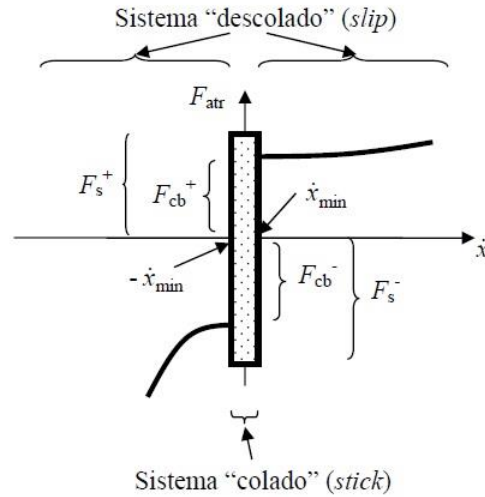


Figura 25 - Força de atrito função da velocidade segundo o modelo de Karnopp [5].

Várias variantes do modelo de Karnopp são utilizadas para efeitos de simulação. Apesar de conduzir a bons resultados, este modelo pode ter um problema em casos onde a força externa não é dada explicitamente, como sistemas com várias interfaces de atrito em série [13]. Um exemplo de um modelo baseado no modelo de Karnopp está representado no diagrama de blocos da Figura 26, adaptada de [13].

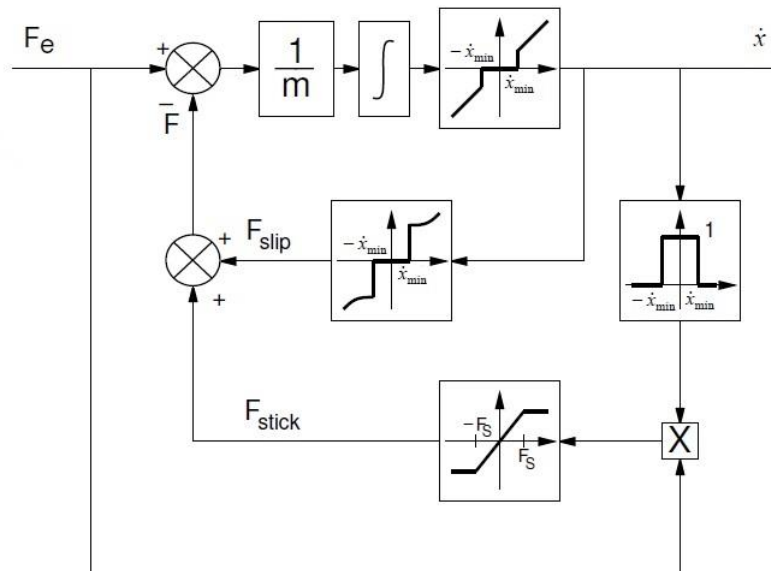


Figura 26 - Diagrama de blocos para o Modelo de Karnopp.

### 3.3.2 Modelos Dinâmicos

Apesar de os modelos até agora apresentados serem amplamente utilizados na literatura, não são capazes de descrever fenómenos como os ciclos de histerese relacionados com a trajetória da velocidade, o movimento de *pre-sliding* verificado a nível microscópico e relacionado com a deformação permanente das rugosidades da interface de contacto bem como o desenvolvimento da força de atrito estático (*stiction*) e a transição desta para o regime cinético.

#### 3.3.2.1 Modelo de Dahl

Dahl (1968) [30] desenvolveu um modelo de atrito amplamente utilizado para simulação de atrito em rolamentos de esferas em servomecanismos [18]. Este modelo foi ainda usado como modelo *standard* para simulação na indústria aeroespacial [15]. A descrição do fenómeno parte da relação entre tensão e deformação da mecânica dos sólidos clássica. Quando a interface é sujeita a uma tensão (promovendo o deslocamento), a força de atrito aumenta até que a rotura ocorra [18]. Esta relação encontra-se representada na Figura 27, adaptada de [18].

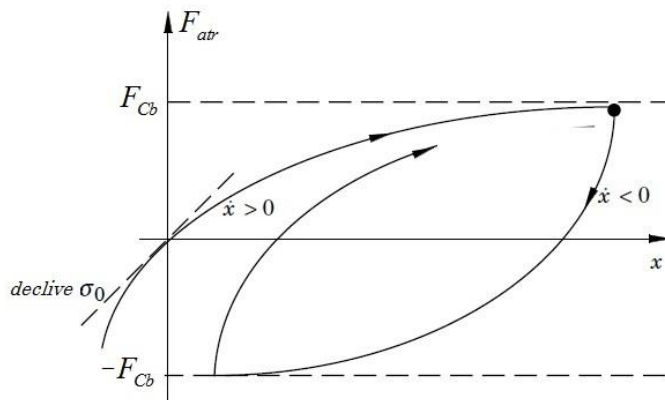


Figura 27 - Relação entre força de atrito e deslocamento dada pelo modelo de Dahl.

Este modelo permite então descrever o já referido movimento de pré-deslizamento (*pre-sliding*), através da seguinte equação diferencial adaptada de [18]:

$$\frac{dF_{atr}}{dx} = \sigma_0 \left[ 1 - \frac{F_{atr}}{F_{Cb}} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right]^\alpha \quad (25)$$

onde  $x$  representa o deslocamento entre os corpos em contacto,  $\sigma_0$  o coeficiente de rigidez e  $\alpha$  um parâmetro variável que determina a forma da curva. Quanto maior este parâmetro mais pronunciada será a curva, sendo  $\alpha=1$  o normalmente utilizado [18].

Assim, a força de atrito é unicamente dependente da posição, como função do deslocamento e do sinal da velocidade [15]. De forma a obter uma função temporal da força de atrito observou-se que:

$$\frac{dF_{atr}}{dt} = \frac{dF_{atr}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (26)$$

ou seja:

$$\frac{dF_{atr}}{dt} = \sigma_0 \left[ 1 - \frac{F_{atr}}{F_{Cb}} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right]^\alpha \cdot \dot{x} \quad (27)$$

Considerando  $\alpha = 1$  tem-se:

$$\frac{dF_{atr}}{dt} = \sigma_0 \dot{x} - \frac{F_{atr}}{F_{Cb}} |\dot{x}| \quad (28)$$

Introduzindo que  $F_{atr} = \sigma_0 \cdot z$  vem:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{F_{Cb}} \cdot z \quad (29)$$

Em regime permanente (SS) o modelo reduz-se a:

$$z^{ss} = \frac{F_{Cb}}{\sigma_0} \cdot \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (30)$$

$$F_{atr}^{ss} = F_{Cb} \cdot \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (31)$$

Obtém-se assim uma generalização do modelo de Coulomb, não sendo o modelo de Dahl capaz de descrever nem o efeito de Stribeck nem o fenómeno de *stick-slip*. Este modelo é no entanto capaz de modelar de forma correta o movimento de pré-deslizamento (*pre-sliding*) no domínio em que o sistema se encontra “colado” (*stiction*) [2, 14, 18].

### 3.3.2.2 Modelo das Fibras (Bristle)

Proposto por Haessig *et al.* (1990) [31], este modelo pretende capturar o comportamento das rugosidades em contacto a nível microscópico, considerando cada ponto de contacto como uma ligação entre duas fibras flexíveis. Tal como as rugosidades das superfícies têm características aleatórias, também estes pontos de contacto têm número e posição aleatórios. Com o movimento relativo entre os corpos, a tensão nos pontos de contacto aumenta, assumindo que as fibras se comportam como molas que levam ao aparecimento da força de atrito. Esta força de atrito é dada pela equação (32) onde  $N$  é o número de fibras consideradas,  $\sigma_0$  a rigidez das fibras, que pode ser definido como função da velocidade [13, 18], e  $x_i$  e  $b_i$  são a posição relativa e a posição inicial de cada fibra, respetivamente [13, 15, 18].

$$F_{atr} = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (32)$$

Com o movimento relativo dos corpos  $|x_i - b_i|$  aproxima-se de  $\delta_s$  (deformação máxima admitida para as fibras), quando  $x_i$  iguala  $b_i$  assume-se que deixa de existir contacto nesta fibra, e se cria um novo ponto de contacto posicionado aleatoriamente [13, 15, 18]. A localização do novo ponto de contacto formado é dada por:

$$b_i^{k+1} = b_i^k + \text{uniform}(\Delta) \cdot \text{sgn}(x_i - b_i^k) \quad (33)$$

onde  $\Delta$  define a distribuição uniforme utilizada [13].

A complexidade deste modelo aumenta com  $N$ , os autores apresentam bons resultados utilizando 20-25 fibras. No entanto um único ponto de contacto permite uma descrição razoável mas com grandes variações da força de atrito [13]. Este modelo revela-se eficaz na descrição do atrito como fenómeno de natureza aleatória, sendo esta aleatoriedade proporcional ao número de pontos de fibras considerado [18]. Contudo, para além de o modelo considerado se revelar ineficiente para simulação, uma vez que é necessário observar o estado de cada fibra (vezes  $N$  fibras), na fase de movimento pré-deslizamento pode existir um comportamento oscilatório uma vez que não se considera existir amortecimento [13, 15, 18].

### 3.3.2.3 Modelo de Reinicialização do Integrador (Reset Integrator)

Na sequência do modelo anterior, Haessig *et al.* (1990) [31] apresentam um outro modelo que pode ser visto como representativo de um único ponto de contacto, e surge como uma tentativa de tornar o modelo das fibras mais eficiente do ponto de vista computacional. Para isto considera-se que o contacto entre as fibras não termina, mas que a partir do ponto de rotura o estado das fibras é mantido constante, através de uma condição lógica que desliga o aumento da tensão [13, 18]. Por forma a determinar a tensão nas fibras em contacto é introduzida no modelo uma nova variável de estado  $z$  representativa da deflexão de cada fibra, sendo então o modelo definido pelas seguintes equações:

$$F_{atr} = (1 + a(z)) \cdot z \cdot \sigma_0 (\dot{x}) + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (34)$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{se } (\dot{x} > 0 \wedge z \geq z_0) \vee (\dot{x} < 0 \wedge z \leq -z_0) \\ \dot{x} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (35)$$

$$a(z) = \begin{cases} a & \text{se } |z| < z_0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (36)$$

Na equação (34)  $\sigma_1 \frac{dz}{dt}$  é o termo dissipativo, ativo apenas na fase de movimento pré-deslizamento. O coeficiente de amortecimento  $\sigma_1$  é determinado de acordo com o amortecimento desejado para o sistema massa-mola-amortecedor equivalente. A diferenciação entre o movimento pré-

deslizamento e o regime de atrito cinético é conseguida através da função  $a(z)$ . Se  $|z| < z_0$  o modelo encontra-se na condição de pré-deslizamento, sendo a força de atrito função de  $z$ , quando atingida a máxima deflexão das fibras ( $z_0$ )  $a(z)$  toma um valor nulo, diminuindo a força de atrito total. Ainda na equação (34),  $\sigma_0(\dot{x})$  é uma função arbitrária que define o comportamento da força de atrito com a velocidade no regime cinético (*slipping*) [13, 18]. Apesar da evolução ao nível da eficiência da simulação, este modelo mantém o problema da observação da deflexão das fibras [13, 15, 18].

### 3.3.2.4 Modelo de LuGre

Este modelo desenvolvido nas universidades de Lund (Suécia) e Grenoble (França) [15] foi pela primeira vez apresentado por C. Canudas de Wit *et al.* (1993) [32] e surge fundamentado em descrições experimentais do fenómeno do atrito [13] tal como as anteriormente analisadas neste trabalho.

Do mesmo modo que o modelo das fibras, o modelo de LuGre caracteriza o contacto entre as rugosidades das superfícies como fibras que defletem por ação de uma força tangencial à superfície (Figura 28), o que dá origem a uma força de atrito [33]. Por simplificação o modelo considera as fibras de uma das superfícies rígidas [33].

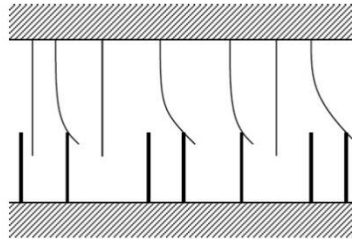


Figura 28 - Interface entre duas superfícies modeladas por fibras [33].

No entanto, em vez de tentar capturar as características aleatórias do contacto, este modelo é baseado no comportamento médio das fibras em contacto [13]. Assim o comportamento de uma única fibra representa a deflexão média de todas as fibras (pontos de contacto), como mostra a Figura 29 adaptada de [13], sendo a deflexão média  $z$  modelada pela seguinte equação adaptada de [33]:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{g(\dot{x})} z \quad (37)$$

onde  $\dot{x}$  representa a velocidade relativa entre as superfícies, e  $\sigma_0$  um parâmetro de rigidez da fibra [15, 33].

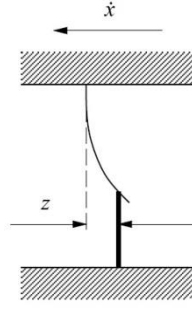


Figura 29 - Fibra representativa da deflexão média.

A função  $g(\dot{x})$  é uma função arbitrária positiva e decrescente para velocidades crescentes [15]. A escolha desta função permite incluir no modelo características estáticas já analisadas como o atrito de Coulomb e o efeito de Stribeck [14, 15, 18, 33]. A parametrização normalmente utilizada na bibliografia é a apresentada na equação (38) onde  $\alpha_0$  representa a força de atrito de Coulomb  $F_{Cb}$ ,  $\alpha_1$  representa diferença entre a força de atrito de Coulomb  $F_{Cb}$  e a força de atrito estático máxima  $F_s$ , o parâmetro  $v_s$  é representativo da velocidade de Stribeck e corresponde, na curva de regimes de atrito (Figura 16), à velocidade para a qual a força de atrito é mínima [13, 14, 18, 33].

$$g(\dot{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e^{-\left(\dot{x}/v_s\right)^2} \quad (38)$$

A força de atrito desenvolvida pela fibra é modelada pela equação (39) onde  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  representam, respetivamente, o coeficiente de rigidez relativo à deformação microscópica  $z$  e o coeficiente de amortecimento associado à velocidade de deformação do elemento de fibra  $dz/dt$  [13, 34]. Estes são denominados de parâmetros dinâmicos que permitem captar o comportamento do tipo mola evidenciado para pequenos deslocamentos, i.e. durante o movimento de pré-deslizamento [18], bem como a existência de ciclos de histerese relativos a variações de velocidade [14].

$$F_{atr} = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + f(\dot{x}) \quad (39)$$

A função  $f(\dot{x})$  permite a inclusão da força de atrito viscoso, normalmente encontrada nos modelos estáticos. Esta parcela da força de atrito total não possui nenhuma dinâmica e pode não ser linear relativamente à velocidade [13]. No entanto, é corrente a utilização de uma parametrização linear da força de atrito viscoso relativamente à velocidade, como evidenciado na equação (40) onde  $\alpha_2$  representa o coeficiente de atrito viscoso [15].

$$f(\dot{x}) = \alpha_2 \dot{x} \quad (40)$$



Analisando a formulação deste modelo em regime permanente vem que:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow z^{ss} = \frac{g(\dot{x})}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (41)$$

$$F_{atr}^{ss} = \sigma_0 z^{ss} + f(\dot{x}) \quad (42)$$

Substituindo (42) em (41) tem-se que:

$$F_{atr}^{ss} = g(\dot{x}) \operatorname{sgn}(\dot{x}) + f(\dot{x}) \quad (43)$$

Finalmente, dado (38) e (40) vem:

$$F_{atr} = \left( \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_s}\right)^2} \right) \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \alpha_2 \dot{x} \quad (44)$$

Esta equação define a curva apresentada na Figura 30, adaptada de [35], e ajusta-se ao comportamento do atrito evidenciado nos modelos clássicos (estáticos) da força de atrito, descritos anteriormente na secção 3.3.1.1, pelo que são validadas as parametrizações de  $g(\dot{x})$  e  $f(\dot{x})$ . Os parâmetros  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $v_s$  são então denominados de parâmetros de regime permanente ou estáticos, podendo ser obtidos através do mapeamento da força de atrito lida para diferentes valores de velocidade (constante) [34].

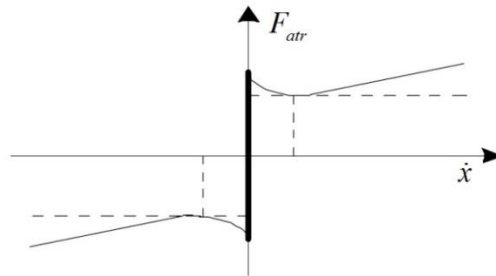


Figura 30 - Curva força de atrito-velocidade definida pelo modelo de LuGre (em regime permanente).

Por forma a melhorar o comportamento do modelo em situações de inversão do sentido de movimento e transições entre adesão e deslizamento, uma terceira parametrização pode ser efetuada. Assim, e ainda por forma a melhorar a capacidade do modelo para captar alguns dos fenómenos relacionados com o atrito, é estabelecido um coeficiente de amortecimento das fibras dependente da velocidade,  $\sigma_1(\dot{x})$  [13]. A parametrização normalmente utilizada é apresentada na equação (45) onde  $\sigma_1'$  representa o coeficiente de amortecimento em pré-deslizamento e  $v_c$  a velocidade a partir da qual o valor do amortecimento decai, de modo a garantir a passividade do modelo em deslizamento.

$$\sigma_1 = \sigma_1' \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_c}\right)^2} \quad (45)$$

Comparativamente aos modelos anteriormente apresentados o modelo de LuGre revela-se capaz de descrever e compatibilizar as características dinâmicas do fenómeno do atrito com as suas características estáticas (i.e. velocidade constante), isto com um custo computacional não muito elevado. Sendo ainda um modelo amplamente referido e utilizado na literatura. Assim, para a modelação de atrito no servossistema pneumático em estudo, foi seleccionado o modelo de atrito de LuGre. Posteriormente foi efetuado um estudo sobre as metodologias de estimação de parâmetros referenciadas na literatura e das quais se faz uma breve síntese na secção seguinte.

### 3.4 Metodologias de Estimação de Parâmetros do Modelo de LuGre

Como visto na secção 3.3.2.4 da presente dissertação, o modelo de LuGre é caracterizado pelas equações (37) e (39), e pelas parametrizações das funções  $g(\dot{x})$  e  $f(\dot{x})$  indicadas nas equações (38) e (40) respetivamente. Desta formulação resulta um conjunto de seis parâmetros: quatro parâmetros estáticos ou de regime permanente e dois parâmetros característicos da dinâmica evidenciada no regime de pré-deslizamento. Este conjunto de parâmetros permite o ajuste do modelo ao sistema em estudo, a sua estimação deverá ser efetuada caso a caso por via experimental [13]. No entanto alguns dos parâmetros podem ser ajustados de forma empírica, como no caso da velocidade de Stribeck e da rigidez e amortecimento das fibras [13]. Valores nominais típicos para estes parâmetros são apresentados de seguida, onde  $m$  representa a inércia do corpo sujeito a atrito.

$$\sigma_0 = 10^3 \text{ a } 10^5 \quad (46)$$

$$v_s = 0,01 \quad (47)$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{\sigma_0 m} \quad (48)$$

Nos pontos seguintes será apresentada um conjunto de metodologias encontradas na bibliografia para a estimação dos parâmetros estáticos e dinâmicos do modelo.

#### 3.4.1 Parâmetros Estáticos

Relativamente aos parâmetros estáticos, a informação encontrada na bibliografia conduz de forma geral à mesma metodologia de estimação, variando apenas o método de obtenção dos dados experimentais. C. Canudas de Wit *et al.* (1997) [34], Z. Wenjing (2007) [35], N. Wondimu (2006) [15] e D. Meng *et al.* (2011) [36] apresentam para os diversos tipos de acionamento uma metodologia base similar. A equação (44) descreve o comportamento da força de atrito função da velocidade, correspondendo cada ponto da curva a condições de velocidade constante. Assim, os parâmetros estáticos ( $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $v_s$ ), presentes nesta equação, podem ser obtidos pela realização de várias experiências em condições de regime permanente, i.e. a velocidade constante. Deverão ser realizadas

experiências numa gama abrangente de velocidades de forma a tornar evidente não só as características de baixa velocidade como a força de atrito de Coulomb, a força de atrito estático e o fenómeno de Stribeck, mas também o atrito viscoso característico de velocidades mais elevadas. Do mapeamento dos dados experimentais de força de atrito vs. velocidade, é possível efetuar o ajuste dos parâmetros de forma a sobrepor a curva dada pela equação (44) aos pontos experimentais, como evidenciado na Figura 31.

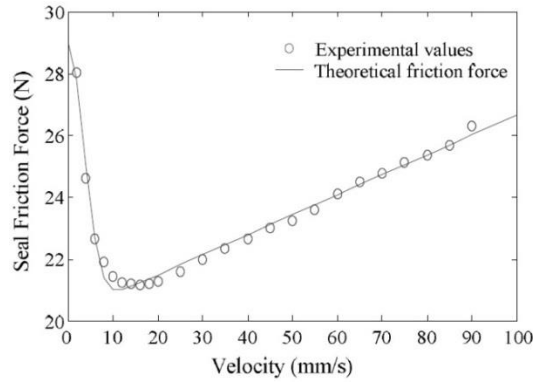


Figura 31 - Mapeamento de valores experimentais e curva teórica de força de atrito vs. velocidade [36].

A aproximação da curva é normalmente conseguida utilizando o método de aproximação de mínimos quadrados, pela função enunciada na equação (49), onde  $F_{atr}(\dot{x}_i)$  corresponde aos valores de força de atrito obtidos experimentalmente para cada valor  $\dot{x}_i$ , e  $\hat{F}_{atr}(\dot{x}_i)$  é dado pela equação (50) [34].

$$\min_{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{v}_s} \sum_{i=1}^n [F_{atr}(\dot{x}_i) - \hat{F}_{atr}(\dot{x}_i)]^2 \quad (49)$$

$$\hat{F}_{atr}(\dot{x}_i) = \left( \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}_i}{\hat{v}_s}\right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{x}_i) + \hat{\alpha}_2 \dot{x}_i \quad (50)$$

No que diz respeito à colocação do sistema em movimento de regime permanente, a metodologia difere de acordo com o tipo de acionamento. C. Canudas de Wit *et al.* (1997) [34] utiliza para o caso de um servomotor DC o controlo de velocidade em malha fechada, utilizando um controlador PI [34]. No caso de um sistema hidráulico, N. Wondimu (2006) [15] efetua o controlo da velocidade por variação em degrau da entrada da válvula em malha aberta. No caso de um sistema servopneumático, a metodologia utilizada por D. Meng *et al.* (2011) [36] inclui um servomotor que aciona um sistema de transmissão fuso-porca de esferas, cujo carro móvel se encontra solidário com o êmbolo do cilindro [36]. Através do controlo em malha fechada do servomotor é possível colocar o êmbolo do cilindro em movimento, a velocidade constante, tendo as câmaras do cilindro à pressão atmosférica [36].

### 3.4.2 Parâmetros Dinâmicos

Ao contrário dos parâmetros estáticos, para a identificação dos parâmetros dinâmicos as metodologias encontradas são variadas. Dada a sensibilidade ao valor dos parâmetros das fibras ( $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ ), evidenciada pelas características do movimento de stick-slip, C. Canudas de Wit *et al.* (1997) [34] propõem a realização de experiências em malha aberta, que induzam este tipo de comportamento, bem como inversão de velocidade [34]. No caso do servomotor DC este tipo de movimento é conseguido por variação do binário de acionamento, como apresentado na Figura 32.

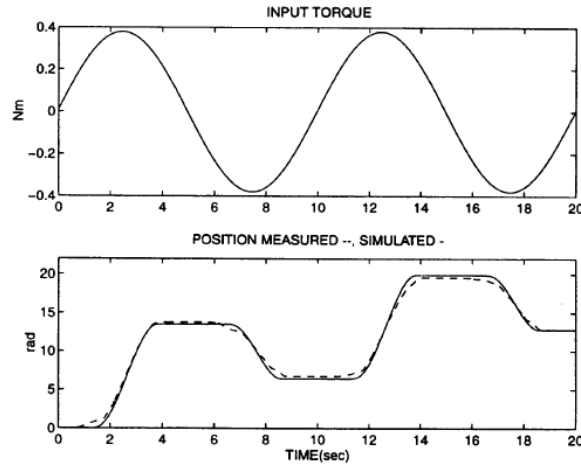


Figura 32 - Experiência de identificação dos parâmetros dinâmicos em servomotor DC [34].

A partir dos dados de posição ( $x$ ) obtidos experimentalmente é então feito o ajuste dos dados de deslocamento ( $x_m$ ), obtidos por integração numérica da seguinte equação:

$$M \frac{d^2 x_m}{dt^2} = u - \hat{F}_{atr} \quad (51)$$

onde  $M$  é a inércia do sistema,  $u$  o binário aplicado pelo servomotor e o binário de atrito estimado ( $\hat{F}_{atr}$ ) é dado pelas equações (52) e (53).

$$\hat{F}_{atr} = \hat{\sigma}_0 z + \hat{\sigma}_1 \frac{dz}{dt} + \alpha_2 \dot{x}_m \quad (52)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x}_m - \hat{\sigma}_0 \frac{|\dot{x}_m|}{g(\dot{x}_m)} z \quad (53)$$

O ajuste dos dados é feito através da minimização da seguinte função de erro por forma a encontrar  $\sigma = [\sigma_0, \sigma_1]$ :

$$E(x, x_m; \hat{\sigma}) = \sum_{k=0}^N [x(k, \sigma) - x_m(k, \hat{\sigma})]^2 \quad (54)$$

Outras metodologias são encontradas na bibliografia, como a identificação no domínio das frequências apresentada por R. Hensen *et al.* (2002) [37], ou utilizando redes neuronais como apresentado por Huo Ai-qing *et al.* (2012) [38]. Contudo dado o maior grau de complexidade, e tendo em vista um estudo mais detalhado dos fenómenos associados ao atrito no regime de pré-deslizamento, estas metodologias foram à partida descartadas.



## 4 ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE ATRITO DE LUGRE

---

Como visto anteriormente, da formulação do modelo de atrito de LuGre resulta um conjunto de seis parâmetros, quatro parâmetros estáticos e dois parâmetros dinâmicos. O estudo do modelo de atrito, do modelo dinâmico do sistema e das metodologias referenciadas na literatura conduziram a um conjunto de procedimentos experimentais que serão seguidamente explicitados, e dos quais resultaram os dados experimentais utilizados para a obtenção de cada um dos parâmetros do modelo. Serão ainda explicitadas ao longo deste capítulo as metodologias de aproximação utilizadas e respetiva discussão dos resultados obtidos.

### 4.1 Parâmetros Estáticos

Conforme estudado, o modelo de atrito de LuGre possui quatro parâmetros ditos de regime permanente, ou estáticos, que permitem descrever o comportamento estacionário da força de atrito em função da velocidade. Assim, interessa efetuar um estudo do comportamento do sistema pneumático em regime permanente, i.e. a velocidade constante e diferente de zero, por forma a tornar possível o mapeamento de pontos de força de atrito-velocidade. Interessa ainda efetuar uma avaliação da força de descolamento, ou seja, a força necessária para que o atrito estático seja vencido e haja movimento sustentado (*gross sliding*) [13]. Deste modo, a caracterização dos parâmetros estáticos encontra-se dividida em dois procedimentos distintos, um procedimento para a realização de ensaios a velocidade constante e outro procedimento relativo a ensaios de descolamento do cilindro pneumático a partir de uma situação de repouso. Para além desta distinção revelou-se ainda importante a diferenciação entre o estudo do movimento de avanço e de recuo do cilindro devido às claras assimetrias existentes. Pontualmente foram ainda identificadas/verificadas dependências relativas a variáveis como a pressão, dependências essas que serão analisadas de forma isolada em cada secção.

## 4.1.1 Ensaios a Velocidade Constante

Tendo como objetivo a recolha de dados que permitam a caracterização do comportamento da força de atrito em regime permanente, para vários valores de velocidade, foi realizado um conjunto de ensaios para o avanço e recuo do cilindro com dois níveis de pressão distintos (4 e 7 bar de pressão absoluta de alimentação). A regulação de velocidade foi conseguida por comando em malha aberta da abertura das servoválvulas que controlam cada uma das câmaras do cilindro pneumático, sendo a variação da abertura da gaveta efetuada de forma simétrica ( $\delta u_A = -\delta u_B$ ) a partir da posição central da gaveta ( $u_{A0} = u_{B0} = 5\text{ V}$ ). Para cada abertura das válvulas foi realizado um ensaio com movimentos consecutivos de vaivém do conjunto móvel e recolhidos os dados de pressão de ambas as câmaras do cilindro e posição do carro móvel para posterior processamento.

Deste procedimento resultou um conjunto de dados que permitiram o traçado de gráficos conforme os apresentados na Figura 33 e Figura 34, no caso relativos ao avanço, com  $\delta u_A = -\delta u_B = 0,4\text{ V}$  e uma pressão de alimentação de 4 bar (absoluto). Este ensaio será ao longo desta secção tomado como exemplificativo do procedimento seguido para a obtenção dos resultados experimentais. Na Figura 33 é apresentada a evolução da posição do carro móvel no tempo, o gráfico da Figura 34 representa a evolução no tempo da pressão em cada uma das câmaras do cilindro pneumático.

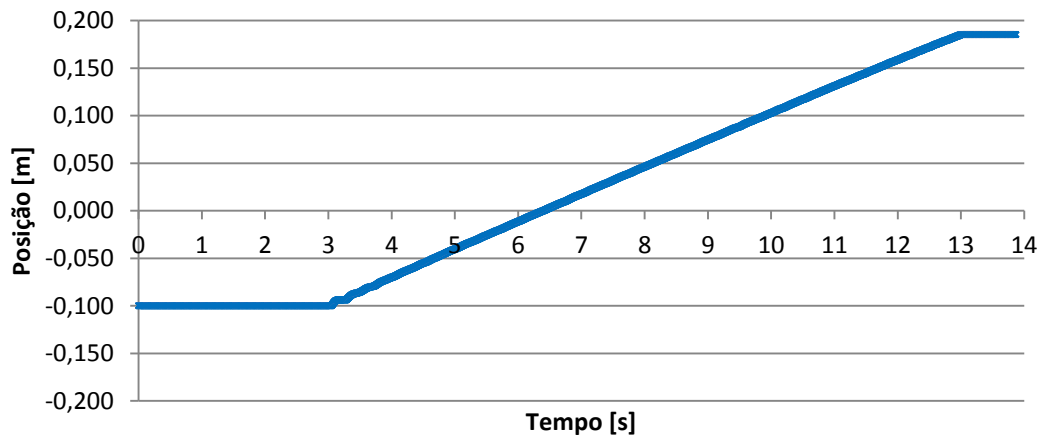


Figura 33 - Evolução no tempo da posição do carro móvel.



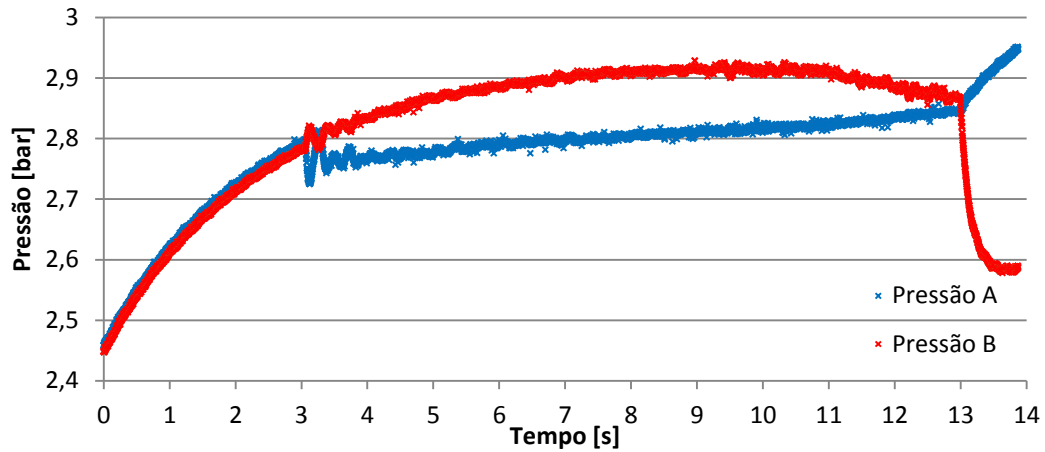


Figura 34 - Evolução no tempo da pressão em cada câmara do cilindro.

#### 4.1.1.1 Análise e Processamento dos Dados Experimentais

Após a realização dos ensaios experimentais procedeu-se ao tratamento dos dados recolhidos. Como foi já exposto na secção 3.4.1 desta dissertação, pretende-se encontrar pares de pontos força de atrito-velocidade, retirados em condições de regime permanente, que permitam mapear o comportamento da força de atrito em função de velocidades constantes. Assim, dos dados obtidos experimentalmente procedeu-se ao cálculo *offline* da velocidade e da força de atrito.

Por forma a determinar a zona do ensaio onde existe velocidade constante procedeu-se à análise dos dados de posição obtidos. Embora por observação do gráfico da Figura 33 se verifique que a curva obtida possui uma zona claramente linear, procedeu-se ao cálculo da velocidade através de diferenciação numérica do sinal do transdutor de posição. Para tal foi utilizado o método de diferenças finitas centrais, sendo a velocidade para cada instante dada pela equação (55) onde  $t_i$  é o instante para o qual se calcula a velocidade e  $\Delta$  é o período de amostragem utilizado nos ensaios.

$$\dot{x}(t_i) = \frac{x(t_i + \Delta) - x(t_i - \Delta)}{2\Delta} \quad (55)$$

Do cálculo da velocidade para cada instante resulta o gráfico apresentado na Figura 35 onde é possível distinguir um patamar de velocidade constante entre os quatro e os treze segundos, aproximadamente. É possível ainda distinguir uma zona de arranque do cilindro onde é evidente o fenómeno de *stick-slip* com variações de velocidade de elevada amplitude. É ainda importante referir que, aos treze segundos existe uma queda brusca da velocidade devido ao amortecimento existente no topo do cilindro.

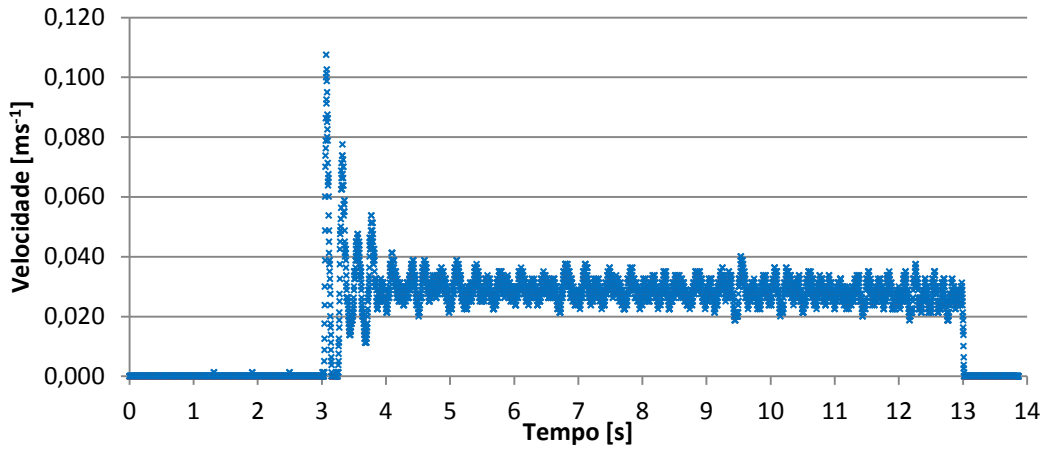


Figura 35 - Evolução no tempo da velocidade do carro móvel.

Para o cálculo da força de atrito considere-se a equação diferencial de movimento do sistema móvel, equação (8), apresentada na secção 2.2.1 do presente documento. Para condições de regime permanente ( $\ddot{x} = 0$ ) e resolvendo a equação em ordem à força de atrito  $F_{atr}$  vem que:

$$F_{atr} = F_A - F_B - F_{atm} = F_m \quad (56)$$

Onde  $F_A$ ,  $F_B$  e  $F_{atm}$  representam respetivamente as forças devidas às pressões reinantes nas câmaras A e B do cilindro pneumático e a força devida à ação da pressão atmosférica, forças estas definidas pelas equações (5) a (7).  $F_m$  representa a força motora efetivamente desenvolvida pelo cilindro pneumático. É então possível, a partir dos dados de pressão de ambas as câmaras do cilindro, determinar a força de atrito a que os elementos móveis do sistema estão sujeitos em cada instante, sendo este cálculo válido apenas na zona onde existe velocidade constante ( $\ddot{x} = 0$ ).

Do mapeamento dos dados de força de atrito obtidos nas condições referidas resulta o gráfico apresentado na Figura 36. Como se verifica a força de atrito não é constante ao longo do curso percorrido a velocidade constante. Por um lado, temos numa fase inicial a influência da dinâmica de pressões em ambas as câmaras do cilindro pneumático, por outro a força de atrito pode variar ao longo do curso devido a eventuais variações dimensionais do corpo do cilindro ou da haste resultantes dos anos de utilização. Verifica-se ainda existência de uma componente de ruído resultante da sobreposição do ruído proveniente dos transdutores de pressão, com eventual ruído mecânico resultante por exemplo da recirculação de esferas no patim do sistema de guiamento ou do acabamento superficial do corpo e da haste do cilindro.

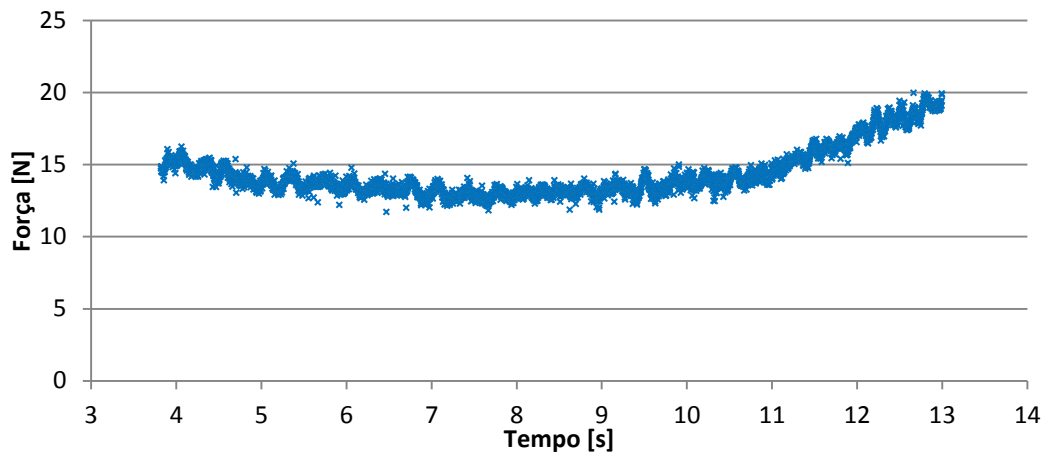


Figura 36 - Evolução da força de atrito com o tempo a velocidade constante.

Por forma a obter um ponto de força de atrito-velocidade para cada ensaio, foi determinada a região da curva de evolução da força de atrito onde esta se mantém tendencialmente constante, salvo as variações identificadas como ruído. Para o intervalo de tempo encontrado obteve-se então um valor médio tanto da força de atrito como da velocidade.

Este procedimento foi utilizado nos diversos ensaios realizados para o avanço e recuo do sistema móvel, e para pressões absolutas de alimentação de 4 e 7 bar. Para cada ensaio, com uma dada abertura das válvulas, sentido de movimento e pressão de alimentação, foram retirados quatro pontos relativos a quatro movimentos de vaivém do conjunto móvel. De seguida será apresentado o mapeamento de todos os pontos obtidos num gráfico de força de atrito função da velocidade e feita a análise detalhada destes resultados.

#### 4.1.1.2 Análise dos Resultados Obtidos

O procedimento seguido nos ensaios experimentais permitiu a recolha de dados para velocidades num intervalo entre  $0,017$  e  $0,091 \text{ ms}^{-1}$  no avanço e entre  $0,018$  e  $0,088 \text{ ms}^{-1}$  no recuo, com uma pressão de alimentação de 4 bar. Para a pressão de alimentação de 7 bar foram conseguidas velocidades entre  $0,014$  e  $0,093 \text{ ms}^{-1}$  relativas ao avanço e entre  $0,019$  e  $0,093 \text{ ms}^{-1}$  no recuo. Do mapeamento dos dados obtidos após processamento resulta o gráfico apresentado na Figura 37.

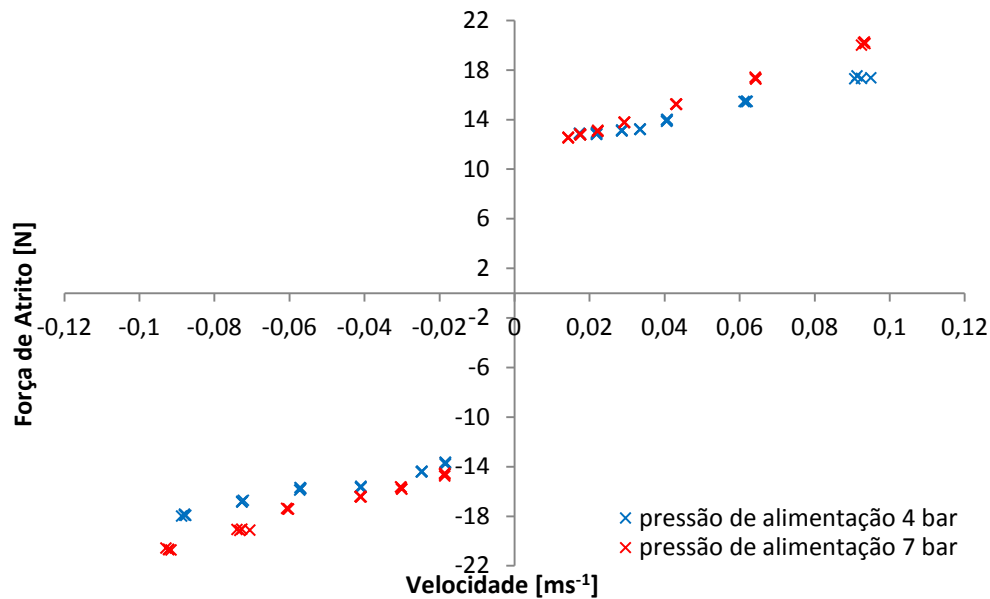


Figura 37 - Mapeamento dos dados experimentais de força de atrito função da velocidade.

Note-se que em todos os casos o procedimento seguido não permitiu a realização de ensaios conclusivos para determinação de pontos relativos a velocidades mais elevadas, pois a limitação do curso do cilindro pneumático não permite a estabilização da velocidade em tempo útil. Este condicionamento não se revela comprometedor para a caracterização do modelo, uma vez que, em tarefas de posicionamento fino, o modelo de atrito se revela particularmente importante para velocidades em torno da velocidade nula. Refira-se ainda a impossibilidade de obtenção de pontos para velocidades muito baixas. De facto, experimentalmente verificou-se que, para velocidades inferiores às mapeadas no gráfico acima o movimento em todo o curso do cilindro é claramente dominado pelo fenómeno de *stick-slip*. Este fenómeno pode ser explicado sob um ponto de vista de estabilidade. Atendendo ao comportamento de regime permanente esperado para a força de atrito em função da velocidade, no intervalo  $]0; \pm v_s[$  existe um gradiente negativo da força de atrito relativamente à velocidade, pelo que se a velocidade aumentar, a força de atrito diminui, o que origina um desequilíbrio positivo entre a força motora e a força de atrito, sendo o sistema forçado a acelerar até ao ponto onde o gradiente se inverte ( $\dot{x} = v_s$ ). Para melhor compreensão deste fenómeno atente-se na Figura 30 da secção 3.3.2.4. Por outro prisma, se a velocidade diminuir, a força de atrito aumenta originando um desequilíbrio negativo entre as forças atuantes no sistema, sendo este desacelerado até  $\dot{x} = 0$ .

Do mapeamento dos dados obtidos e apresentados na Figura 37 pode então verificar-se uma tendência claramente linear da evolução da força de atrito com a velocidade. Isto revela um comportamento para  $\dot{x} > v_s$  claramente dominado por forças viscosas, sendo a relação dada por um coeficiente de atrito constante para cada pressão de alimentação. Este comportamento vem de encontro aos resultados do estudo sobre a força de atrito em atuadores pneumáticos industriais apresentado por

P. Andrighetto *et al.* (2006) [39]. Analisando as diferenças encontradas relativamente à pressão de alimentação, verifica-se que apesar de a relação linear entre a força de atrito e a velocidade se manter, existe um aumento do declive com a pressão que evidencia uma dependência entre o coeficiente de atrito viscoso e a pressão reinante nas câmaras do cilindro. Como consequência, esta dependência verifica-se também sobre a força de atrito de Coulomb.

#### 4.1.2 Ensaios de Descolamento

A força de descolamento (*stiction*) é definida como a força máxima necessária para que o atrito estático seja vencido e haja movimento sustentado (*gross sliding*), correspondendo na curva de atrito em regime permanente ao ponto máximo sobre o eixo das ordenadas ( $\dot{x}=0$ ). Dadas as características estáticas da força de atrito, após o descolamento esta sofre uma queda acentuada que se traduz numa queda da força motora que nestas condições ( $\dot{x}=0$  e ausência de forças exteriores aplicadas) é dada pela expressão (56). Assim, a força de descolamento pode ser encontrada pela determinação da força máxima desenvolvida pelo cilindro pneumático durante o processo de arranque. Deste modo, o procedimento experimental de identificação da força de descolamento consiste, no caso do sistema pneumático, numa variação das pressões das câmaras do cilindro, de forma que daí resulte uma força motora crescente até que o cilindro arranque, e consequentemente haja uma queda brusca da força motora. Todos os ensaios de descolamento foram realizados partindo da posição central do cilindro pneumático.

Conforme documentado na secção 3.2 existe uma forte dependência da força de descolamento relativamente ao gradiente da força aplicada (força motora). Por forma a efetuar uma correta avaliação da força de descolamento foram realizados ensaios preliminares de descolamento para diferentes gradientes de força aplicada, de forma a verificar o comportamento documentado na literatura. Dada a dependência da força de atrito com a pressão evidenciada na secção anterior, foram ainda realizados ensaios de descolamento a diferentes pressões médias das câmaras do cilindro, sendo o gradiente de força aplicado em cada ensaio constante e suficientemente baixo de forma a poder desprezar as forças devidas á inércia.

Uma vez que as servoválvulas não possuem uma característica de pressão/tensão linear, torna-se inviável a realização de ensaios em malha aberta recorrendo ao *setup* até então utilizado. Assim, as servoválvulas foram substituídas por duas válvulas reguladoras de pressão proporcionais que controlam a pressão em cada câmara do cilindro através de uma malha interna de controlo de pressão de estrutura PID. Estas válvulas possuem um ganho de pressão/tensão constante e ajustável de acordo com a pressão de alimentação. Assim, é possível a realização de ensaios em que partindo de pressões diferentes se aplica a mesma variação de pressão (em rampa) e consequentemente a mesma variação da força motora.

#### 4.1.2.1 Avaliação da Dependência do Gradiente de Força Aplicada

Por forma a verificar a dependência da força de descolamento relativamente ao gradiente da força aplicada foram realizados ensaios preliminares de descolamento do cilindro pneumático.

Na realização destes ensaios foi determinada experimentalmente a tensão aplicada a cada uma das válvulas reguladoras ( $u_{A0}$  e  $u_{B0}$ ) que, para a pressão média de 4 bar, equilibra o sistema (ou seja anula a força motora). Encontrados estes valores foi efetuada uma variação da tensão em cada uma das válvulas a partir desta posição de equilíbrio segundo uma rampa de baixo declive e simétrica para cada uma das válvulas de modo que  $u_A = u + u_{A0}$  e  $u_B = -u + u_{B0}$ , sendo  $u = c \cdot t$ . Foi desta forma possível variar a força motora de forma constante mantendo a pressão média entre as câmaras do cilindro em torno do valor de referência. Este procedimento foi repetido para valores de declive de tensão aplicada entre 0,00125 e 0,08 Vs<sup>-1</sup>, que equivale em força a gradientes entre 0,12 e 7,72 Ns<sup>-1</sup>.

Dos dados obtidos experimentalmente resulta o mapeamento de força de descolamento função da rampa de tensão aplicada à servoválvula apresentado na Figura 38.

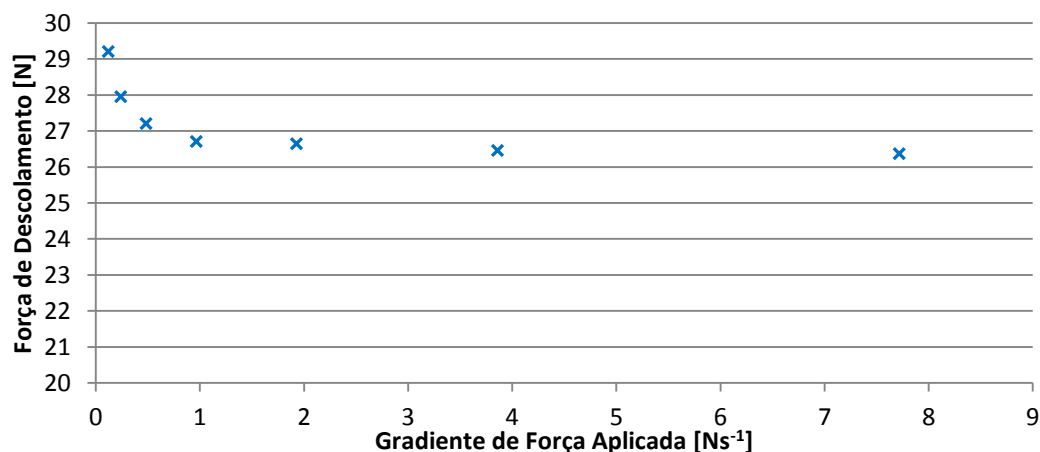


Figura 38 - Força de descolamento função da rampa de força aplicada ao sistema móvel.

Tal como esperado verifica-se a tendência da relação entre a força de descolamento e o gradiente de força aplicada documentada na literatura e apresentada na Figura 21.

#### 4.1.2.2 Avaliação da Dependência da Pressão Média

Resultado da dependência da pressão verificada experimentalmente para o coeficiente de atrito viscoso e para a força de atrito de Coulomb (secção 4.1.1.2) torna-se relevante o estudo da influência da pressão no valor da força de descolamento, assim foi efetuado um conjunto de ensaios de descolamento definindo a pressão média entre as câmaras do cilindro como a variável em análise. Estes ensaios foram realizados em torno de pressões médias absolutas nas câmaras do cilindro de 3, 4, 5 e 6 bar para o movimento de avanço e de recuo.

O procedimento seguido foi semelhante ao apresentado na secção anterior, passando também pela determinação experimental da tensão aplicada a cada uma das válvulas ( $u_{A0}$  e  $u_{B0}$ ) que para cada pressão média equilibra o sistema. A Tabela 5 apresenta os valores de equilíbrio do sistema encontrados para cada pressão média.

Tabela 5 - Valores de tensão que equilibram o sistema para cada pressão média.

Pressão Média	$u_{A0}$	$u_{B0}$
3 bar	3,12 V	3,62 V
4 bar	4,7 V	5,45 V
5 bar	6,27 V	7,27 V
6 bar	7,84 V	9,1 V

Encontrados estes valores foi efetuada uma variação da tensão aplicada a cada uma das válvulas a partir da posição de equilíbrio segundo uma rampa de baixo declive e simétrica para cada uma das válvulas. Assim, a força motora foi variada de forma constante, mantendo-se a pressão média entre as câmaras do cilindro em torno do valor de referência. Para cada valor de pressão média foram efetuados seis ensaios de descolamento, quer para o avanço quer para o recuo do cilindro, sendo calculada a média dos valores de força de descolamento obtidos para cada pressão média de referência. O gráfico da Figura 39 é representativo da relação obtida entre a força de descolamento e a pressão média nas câmaras do cilindro, para o movimento de avanço e de recuo. Na Tabela 6 – Valores médios e desvio padrão relativos aos dados experimentais de força de descolamento função da pressão. Tabela 6 são ainda apresentados os valores médios e desvio padrão relativos aos dados experimentais obtidos, para os ensaios de descolamento no avanço e recuo do conjunto móvel e para as diferentes pressões médias.

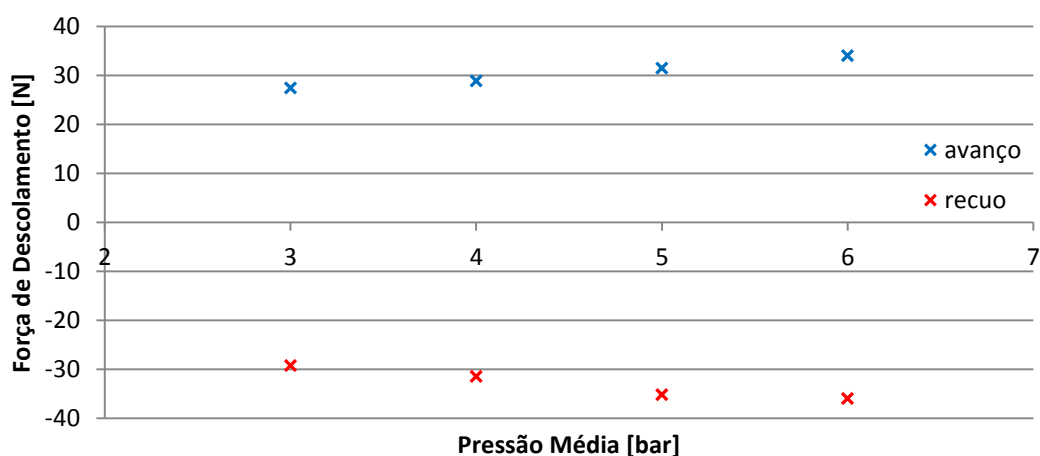


Figura 39- Resultados experimentais para a força de descolamento função da pressão média.

## ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO DE ATRITO DE LUGRE

*Tabela 6 – Valores médios e desvio padrão relativos aos dados experimentais de força de descolamento função da pressão.*

	Pressão Média	Valor Médio da Força de Descolamento	Desvio Padrão
Avanço	3 bar	27,40 N	0,27 N
	4 bar	28,86 N	0,43 N
	5 bar	31,46 N	0,31 N
	6 bar	33,99 N	0,57 N
Recuo	3 bar	-29,24 N	0,56 N
	4 bar	-31,50 N	0,34 N
	5 bar	-35,24 N	0,77 N
	6 bar	-35,99 N	0,57 N

Conforme se verifica na Figura 39, existe uma tendência claramente linear e positiva para a relação entre a força de descolamento e a pressão média nas câmaras do cilindro. Verificam-se também, para cada pressão média, diferenças entre o avanço e o recuo. Esta diferença deve-se à assimetria de vedação do cilindro que no êmbolo possui um vedante “*omega*” (simétrico) ao passo que na haste a vedação é assegurada por um vedante labial (Figura 5). Sendo a pressão na câmara secundária superior no movimento de recuo, a pressão exercida sobre o vedante labial é maior o que por princípio de construção aumenta a tensão na normal à superfície de contacto entre o vedante e a haste.

### 4.1.2.3 Determinação da Força de Descolamento

Como visto anteriormente, o valor da força de descolamento é altamente influenciado quer pelo gradiente da força aplicada ao sistema, quer pela pressão nas câmaras do atuador. Assim, para a determinação da força de descolamento assume-se que o atuador funcionará a uma pressão média absoluta de 4 bar. Este valor foi já apontado por Falcão Carneiro e Gomes de Almeida [40] como a pressão média de equilíbrio que para uma pressão de alimentação de 7 bar maximiza a gama de força disponível no atuador.

Uma vez que o modelo de atrito utilizado consegue descrever o comportamento da força de descolamento com o gradiente de força aplicada, para avaliação experimental da força de descolamento será considerado um valor de referência para o menor declive possível da rampa de força aplicada, igual ao menor declive já utilizado na secção 4.1.2.1. Note-se que este valor é apenas uma referência para a realização de ensaios com uma rampa de força efetivamente constante.

Definidas as condições e variáveis necessárias para a realização dos ensaios de descolamento, foram realizados seis ensaios de caracterização da força de descolamento. Destes ensaios resultaram os



valores de força de descolamento apresentados no gráfico da Figura 40. Como se verifica por análise do gráfico, a dispersão dos resultados quer para o avanço quer para o recuo não é significativa, sendo a média e desvio padrão para o avanço de 28,86 N e 0,43 N respetivamente. Para o movimento de recuo resultou o valor médio da força de descolamento de 31,50 N (em módulo) com desvio padrão de 0,34 N.

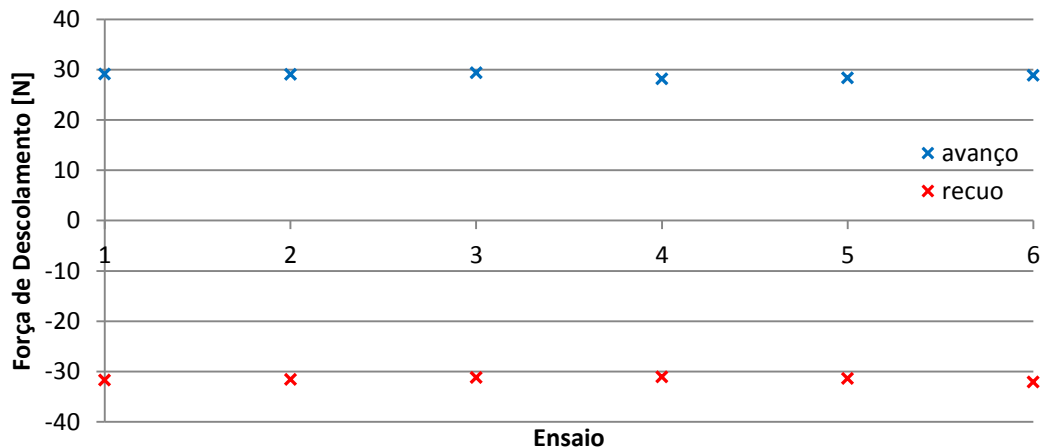


Figura 40 - Força de descolamento à pressão média de 4bar e com um gradiente de força de  $\pm 0,12 \text{ N/s}$ .

Os resultados obtidos revelam-se assim em linha com o que seria esperado. Após os estudos preliminares efetuados, verifica-se uma diferença entre a força de descolamento para o movimento de avanço e para o recuo de cerca de 10%. A repetibilidade dos resultados, evidenciada pelos baixos valores de desvio padrão obtidos, permite concluir que o procedimento seguido foi capaz de descrever a força de descolamento de forma eficaz e precisa, tendo para isto contribuído os estudos e simplificações feitos previamente.

#### 4.1.3 Representação dos Resultados e Aproximação Numérica

Após a realização dos ensaios, avaliações experimentais e tratamento dos dados resultantes, pode então ser feito o mapeamento de todos os dados recolhidos num gráfico que representa a força de atrito função da velocidade, sendo este representativo do comportamento da força de atrito em regime permanente. Este mapeamento é apresentado no gráfico da Figura 41, onde para valores de velocidade nulos são representados os pontos referentes aos valores de força de descolamento obtidos experimentalmente para o movimento de avanço e recuo do cilindro à pressão média de 4 bar. Para valores de velocidade diferente de zero são apresentados os valores de força de atrito obtidos para pressões de alimentação de 4 e 7 bar, igualmente nos movimentos de avanço e de recuo do conjunto móvel. A partir destes dados será então realizada a aproximação numérica à expressão de regime permanente da força de atrito (equação (44)) que permitirá estimar os parâmetros estáticos do modelo de LuGre, tal como explanado na secção 3.4.1. Para a aproximação numérica é utilizada a *Curve*

*Fitting Toolbox™* incluída no software *MATLAB (2013a)*, que utiliza um método de mínimos quadrados não lineares.

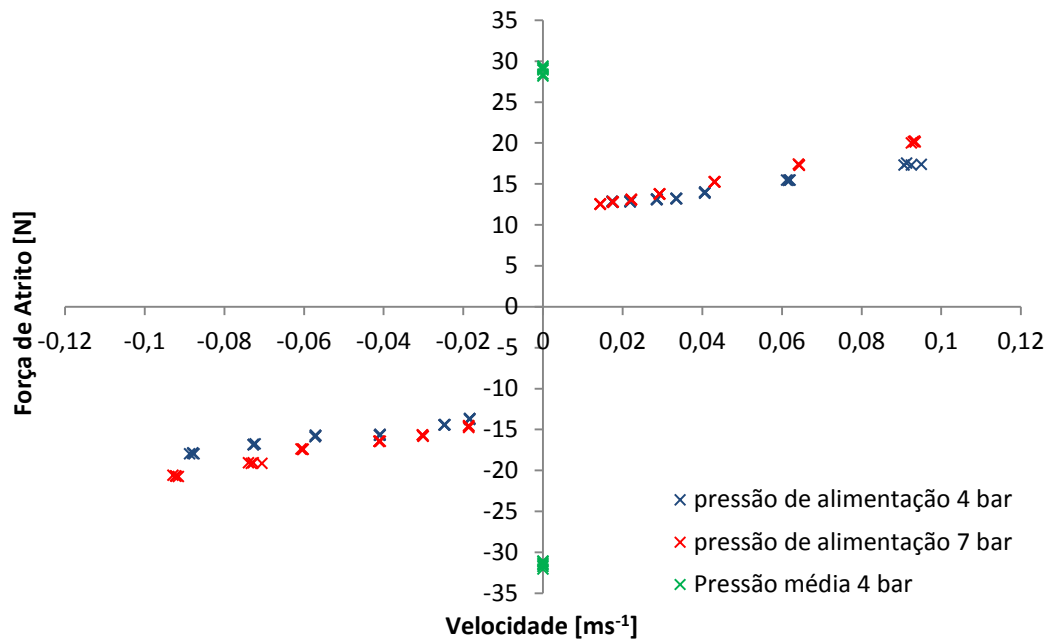


Figura 41 - Mapeamento dos resultados experimentais de força de atrito função da velocidade.

Como foi já analisado nas secções anteriores desta dissertação, para além de diferenças encontradas para os dados recolhidos para o movimento de recuo e para o movimento de avanço, existem ainda diferenças relacionadas com a pressão. Torna-se assim necessário verificar se o modelo permite ou não incluir estas dependências e, em caso negativo, encontrar um critério de simplificação ou uma forma de modelar e incluir essas dependências.

Em relação às diferenças encontradas entre os movimentos de avanço e de recuo, estas podem ser incluídas utilizando duas formulações distintas para  $\dot{x} < 0$  e  $\dot{x} > 0$ , sendo os parâmetros distinguidos pelo sufixo (+) para o avanço pelo sufixo (−) para o recuo.

Relativamente à dependência da pressão, no caso da força de descolamento foi já efetuada uma aproximação de simplificação. No que toca à força de atrito na região onde esta é dominada pelo atrito viscoso, os dados são relativos a pressões de alimentação de 4 e 7 bar, a que correspondem pressões médias durante o movimento na ordem dos 3 e 5 bar. Admitindo nesta situação um comportamento da força de atrito relativamente à pressão, idêntico ao verificado para a força de descolamento, ter-se-á para uma pressão média em torno de 4 bar (critério utilizado para a força de descolamento) um conjunto de pontos cujo declive da regressão linear (i.e. coeficiente de atrito viscoso) será sensivelmente o valor médio entre os declives das regressões obtidas a partir dos pontos experimentais. Um estudo apresentado por D. Meng *et al.* (2011) [36] vem validar esta simplificação na medida que apresenta dados relativos à relação entre o coeficiente de atrito viscoso e a pressão nas câmaras do atuador, e cujos resultados vão de encontro ao já explanado. É ainda de referir que em tarefas de posicionamento, é particularmente importante uma correta identificação em torno de

velocidade nula, sendo menos relevantes erros cometidos na previsão de atrito nesta região. Assim, para efeitos de aproximação numérica, serão considerados para cada caso (avanço/recuo) os pontos obtidos na região de atrito viscoso tanto para a pressão de alimentação de 4 como de 7 bar.

Para arrancar o algoritmo de aproximação foram especificados valores de inicialização para cada um dos parâmetros. No caso do coeficiente de atrito viscoso  $\alpha_2$  e da força de atrito de Coulomb  $\alpha_0$  os valores de inicialização foram obtidos através da aproximação dos pontos experimentais na região de atrito viscoso por uma reta, correspondendo a ordenada na origem ao valor estimado do parâmetro  $\alpha_0$ , designado por  $\hat{\alpha}_0$ , e o declive ao valor estimado para o parâmetro  $\alpha_2$ , designado por  $\hat{\alpha}_2$ . Para o parâmetro  $\hat{\alpha}_1$ , a diferença entre a força de atrito estático máxima e a força de atrito de Coulomb, o valor de inicialização foi determinado pela diferença entre o maior valor de força de descolamento obtido (em módulo) e o valor de inicialização da força de atrito de Coulomb ( $\hat{\alpha}_0$ ). Neste caso o valor obtido foi fixado ainda como limite inferior do intervalo de iteração por forma a garantir que todos os pontos experimentais são incluídos na curva resultante da aproximação. Uma vez que não existem dados experimentais para velocidades em torno da velocidade nula que permitam estimar o ponto de inversão da curva, o valor de inicialização da velocidade de Stribeck  $\hat{v}_s$  foi ajustado empiricamente para que o ponto mínimo da curva de aproximação se encontre em torno dos pontos experimentais correspondentes às velocidades mínimas para o avanço e recuo, tendo o intervalo de iteração sido definido  $\pm 0,0005 \text{ ms}^{-1}$  em torno do valor de inicialização. Na Tabela 7 são apresentados os valores obtidos para inicialização do algoritmo de aproximação numérica.

Tabela 7 - Valores de inicialização do algoritmo de aproximação (parâmetros estáticos).

Parâmetro	Valor de Inicialização	Parâmetro	Valor de Inicialização
$\hat{\alpha}_0^-$	12,974 N	$\hat{\alpha}_0^+$	11,151 N
$\hat{\alpha}_1^-$	18,748 N	$\hat{\alpha}_1^+$	18,238 N
$\hat{\alpha}_2^-$	69,188 Nsm <sup>-1</sup>	$\hat{\alpha}_2^+$	81,833 Nsm <sup>-1</sup>
$\hat{v}_s^-$	0,0085 ms <sup>-1</sup>	$\hat{v}_s^+$	0,007 ms <sup>-1</sup>

Realizadas as aproximações para o movimento de avanço e para o movimento de recuo, chegou-se aos valores dos parâmetros estáticos apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 - Valores obtidos por aproximação para os parâmetros estáticos.

Parâmetro	Valor Aproximado	Parâmetro	Valor de Aproximado
$\hat{\alpha}_0^-$	12,92 N	$\hat{\alpha}_0^+$	11,05 N
$\hat{\alpha}_1^-$	18,75 N	$\hat{\alpha}_1^+$	18,24 N
$\hat{\alpha}_2^-$	69,97 Nsm-1	$\hat{\alpha}_2^+$	83,29 Nsm-1
$\hat{v}_s^-$	0,008 ms <sup>-1</sup>	$\hat{v}_s^+$	0,007345 ms <sup>-1</sup>

O gráfico da Figura 42 apresenta a sobreposição das curvas obtidas por aproximação com os pontos experimentais. Como se verifica, as curvas obtidas descrevem de forma satisfatória o comportamento da força de atrito função da velocidade. Este comportamento de regime permanente vem ainda de encontro ao referenciado na literatura, concretamente no que toca a atuadores pneumáticos como é o caso dos estudos efetuados por D. Meng *et al.* (2011) [36] e por P. Andrighetto *et al.* [39].

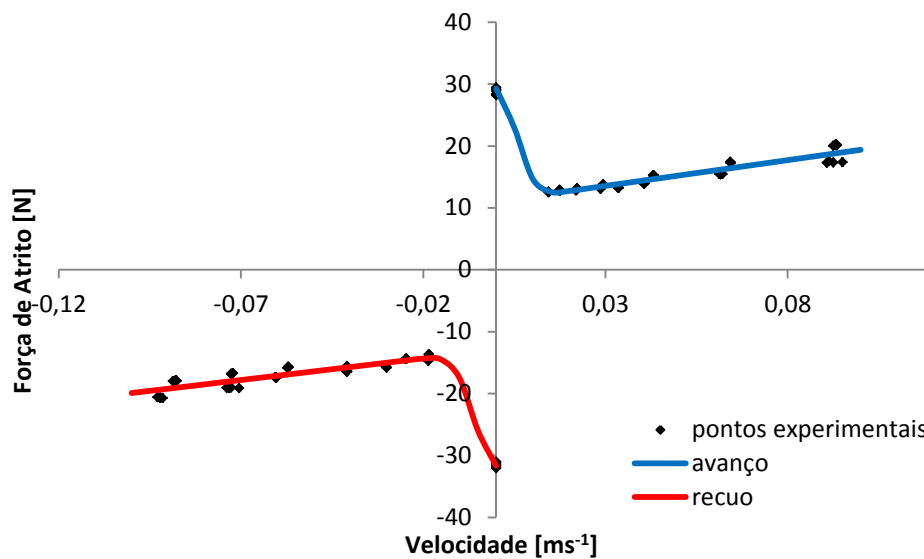


Figura 42 - Curvas obtidas por aproximação numérica dos dados experimentais.

## 4.2 Parâmetros Dinâmicos

Tal como foi já abordado neste documento, o modelo de LuGre possui dois parâmetros dinâmicos ( $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ ) que permitem descrever o comportamento da força de atrito em função da deformação média das fibras em contacto, e da sua derivada (velocidade de deformação). Estes parâmetros podem então ser vistos como o coeficiente de rigidez e o coeficiente de amortecimento médio das fibras, sendo as suas unidades Nm<sup>-1</sup> e Nsm<sup>-1</sup>, respetivamente. Assim, a caracterização dos parâmetros dinâmicos encontra-se dividida em duas secções distintas, identificação da rigidez, onde

interessa analisar o comportamento de pré-deslizamento do sistema, nomeadamente o deslocamento que o sistema sofre antes do descolamento, função da força motora a ele aplicada e identificação do amortecimento do sistema, feita algebricamente, de forma a garantir a passividade do modelo de atrito. Em ambos os casos é efetuada uma descrição dos pressupostos assumidos, assim como a discussão das possíveis implicações para o comportamento final do modelo de atrito. No procedimento de avaliação da rigidez das fibras será ainda feita a comparação entre dois procedimentos de aproximação distintos, sendo daí retiradas as devidas conclusões.

#### 4.2.1 Rigidez

Tendo como objetivo a avaliação da rigidez das fibras das superfícies em contacto foi realizado um conjunto de ensaios de descolamento do cilindro pneumático, sendo o *setup* e procedimento idêntico aos utilizados na secção 4.1.2.3., com um gradiente de força aplicada constante e suficientemente baixo, de modo a que as variações de velocidade  $\dot{x}$  e da variável interna  $z$  não necessitem de ser contabilizadas [34]. Desta forma, a parametrização de  $g(\dot{x})$  dada pela equação (38) pode ser aproximada por:

$$g(\dot{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 \quad (57)$$

Assumindo  $\frac{dz}{dt} \approx 0$  e  $\dot{x} \approx 0$ , a equação (39) reduz-se a:

$$F_{atr} = \sigma_0 z \quad (58)$$

Atendendo à equação do movimento para o sistema sem forças exteriores aplicadas (56) tem-se a equação (59), onde  $\frac{dF}{dt}$  representa ao gradiente de força aplicado.

$$F_{atr} = F_m = \frac{dF}{dt} \cdot t \quad (59)$$

Assim da equação (37), e para  $\dot{x} > 0$  vem:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \frac{dF}{dt} \cdot \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1} \cdot t \cdot \dot{x} \quad (60)$$

Tendo em consideração estes pressupostos, os dados recolhidos experimentalmente serão de seguida alvo de análise e finalmente aproximação do valor de rigidez por duas metodologias distintas, a primeira apresentada por C. Canudas de Wit *et al.* (1997) [34] e uma metodologia própria, desenvolvida no decorrer deste trabalho.

#### 4.2.1.1 Ensaios de Descolamento

Tal como no caso da determinação da força de descolamento, para caracterização da rigidez das fibras foram realizados ensaios de descolamento do sistema. Estes ensaios foram efetuados para ambos os sentidos de movimento (três em cada sentido) a uma pressão média de 4 bar, utilizando válvulas reguladoras de pressão para o comando de pressão em cada câmara do cilindro, sendo o gradiente de força aplicado de  $0,12 \text{ N s}^{-1}$ .

Durante os ensaios anteriormente realizados para avaliação da força de descolamento verificou-se a existência de um deslocamento pré-deslizamento inferior a  $100 \mu\text{m}$ . Tendo em conta a baixa resolução do *encoder* ( $5 \mu\text{m}$ ) para a gama de deslocamentos a analisar, foi instalado na banca experimental um LVDT (*linear variable differential transformer*) com respetivo condicionamento de sinal de forma a permitir uma resolução de  $1 \mu\text{m}$  para uma gama de medição de  $\pm 30 \mu\text{m}$ , sendo assim possível uma caracterização mais precisa do deslocamento no domínio de pré-descolamento. Dada a limitação que este transdutor possui ao nível da gama de medição, optou-se por, nos casos em que o deslocamento de pré-deslizamento excede a gama do LVDT, compor o sinal de posição. Assim, para deslocamentos relativos dentro da gama do LVDT (máximo  $60 \mu\text{m}$ ) o sinal de posição é dado por este, fora desta zona é utilizado o sinal do *encoder*. Na Figura 43 apresenta-se uma sobreposição dos sinais de posição dados pelos dois transdutores de posição onde é possível verificar o ajuste entre os degraus do sinal do *encoder* e a gama linear do LVDT.

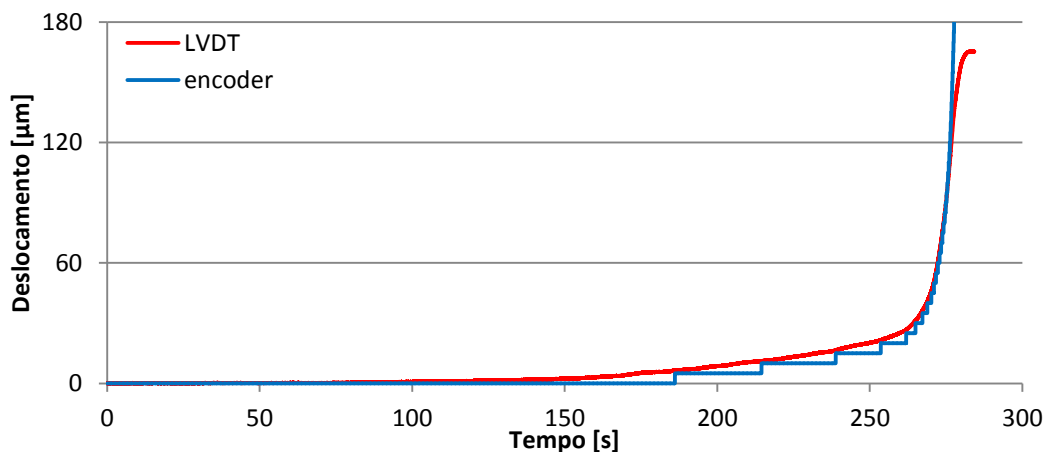


Figura 43- Sobreposição dos sinais dos transdutores de posição.

Dos ensaios realizados resulta um conjunto de dados que permite, para cada ensaio, o traçado de curvas de força vs. deslocamento como a exemplificada na Figura 44. De seguida serão abordadas e devidamente expostas as duas metodologias utilizadas para aproximar o valor de rigidez para os dados experimentais obtidos, sendo posteriormente feita a apresentação dos resultados obtidos bem como a devida comparação e discussão.

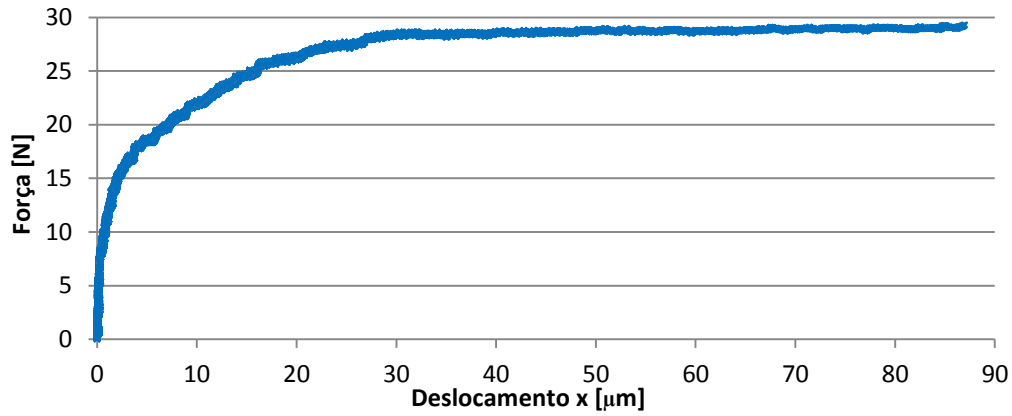
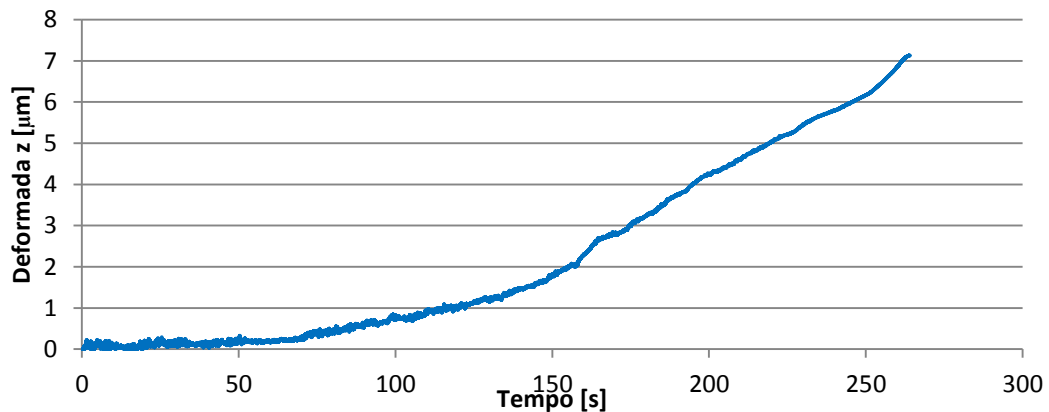


Figura 44 - Curva de força vs. deslocamento no movimento de pré-deslizamento (avanço).

#### 4.2.1.2 Aproximação 1 (metodologia C. Canudas de Wit et al. (1997) [34])

Uma das metodologias encontradas na literatura para aproximação da rigidez das fibras, tendo em conta os dados de força e deslocamento desde o repouso ( $z(0)=0$ ), é proposta por C. Canudas de Wit et al. (1995) [32] e consiste na integração numérica da equação (60). Esta integração foi efetuada via simulação, sendo o *input* a velocidade calculada por diferenças finitas a partir dos dados experimentais de posição durante o movimento de pré-deslizamento. Obtém-se então como saída o comportamento da deformada  $z$  (Figura 45) em cada instante do intervalo  $[0, T]$ , onde  $T$  representa o instante de tempo em que ocorre o descolamento.


 Figura 45 - Comportamento da deformada  $z$  no intervalo de tempo  $[0, T]$ .

A partir da relação dada pela equação (58) os autores desta metodologia sugerem uma aproximação do valor da rigidez ponderada pelo valor da deformação  $z$  em cada instante. O valor de rigidez vem assim dado pela equação (61).

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{Z^T F_m}{Z^T Z} \quad (61)$$

Onde  $Z$  e  $F_m$  representam respetivamente os vetores que contêm o valor da deformada  $z$  e da força motora em cada instante de amostragem.

#### 4.2.1.3 Aproximação 2 (resposta ao degrau de um sistema de 1ª ordem)

Tendo em conta os pressupostos da metodologia de aproximação para a rigidez das fibras, proposta por C. Canudas de Wit *et al.* (1995) [32] e apresentados anteriormente na secção 4.2.1, foi deduzida uma nova metodologia de aproximação. Esta metodologia consiste numa analogia entre a variação da força motora com a posição (no domínio de pré-deslizamento) e a resposta no tempo de um sistema de primeira ordem a uma solicitação de degrau. Para tal atente-se na equação (60), que reescrita com  $\dot{x}$  representado na forma diferencial, colocando  $dx/dt$  em evidência e fazendo a substituição  $F_m = dF/dt \cdot t$ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \left( 1 - \frac{F_m}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) \quad (62)$$

Sendo que são conhecidos valores experimentais para a força motora e para a posição função do tempo ( $F_m = F(t)$  e  $x = x(t)$ ), é então possível definir  $F_m$  como função da posição ( $F_m = F(x)$ ). Assim:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \left( 1 - \frac{F(x)}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \left( 1 - \frac{F(x)}{\alpha_0 + \alpha_1} \right) \quad (63)$$

Atente-se agora na equação (58) que reescrita na forma diferencial e em ordem a  $\sigma_0$  vem:

$$\sigma_0 = \frac{dF_{atr}}{dz} = \frac{dF}{dz} \quad (64)$$

Aplicando a regra da diferenciação em cadeia e substituindo a equação (63) tem-se:

$$\sigma_0 = \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} \Leftrightarrow \sigma_0 = \frac{dF}{dx} \cdot \left( 1 - \frac{F(x)}{\alpha_0 + \alpha_1} \right)^{-1} \quad (65)$$

Resolvendo em ordem a  $dF/dx$  vem:

$$\frac{dF}{dx} = \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{\alpha_0 + \alpha_1} \cdot F(x) \quad (66)$$

Fazendo então a analogia entre o tempo (na resposta temporal de um sistema de primeira ordem a uma solicitação de degrau) e a posição no caso em análise, é possível obter a transformada de Laplace da equação (66) que simplificada e escrita em ordem a  $F(s)$  se reduz a:



$$F(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\sigma_0} \cdot s + 1} \quad (67)$$

Finalmente pela transformada inversa de Laplace obtém-se a resposta “espacial” da força, dada pela seguinte equação:

$$F(x) = (\alpha_0 + \alpha_1) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{\sigma_0}{\alpha_0 + \alpha_1} x} \right) \quad (68)$$

Assim é possível no domínio de pré-deslizamento fazer o ajuste da rigidez  $\sigma_0$  por minimização do erro entre a curva obtida pela equação (68) e os pontos experimentais de força e deslocamento (gráfico da Figura 44).

#### 4.2.1.4 Apresentação e Análise dos Resultados Obtidos

Como foi já referido, foram realizados três ensaios de descolamento para cada sentido de movimento, com vista à estimação da rigidez das fibras. Os dados obtidos experimentalmente foram tratados através das duas metodologias enunciadas anteriormente, sendo os resultados de rigidez apresentados nos gráficos da seguinte figura.

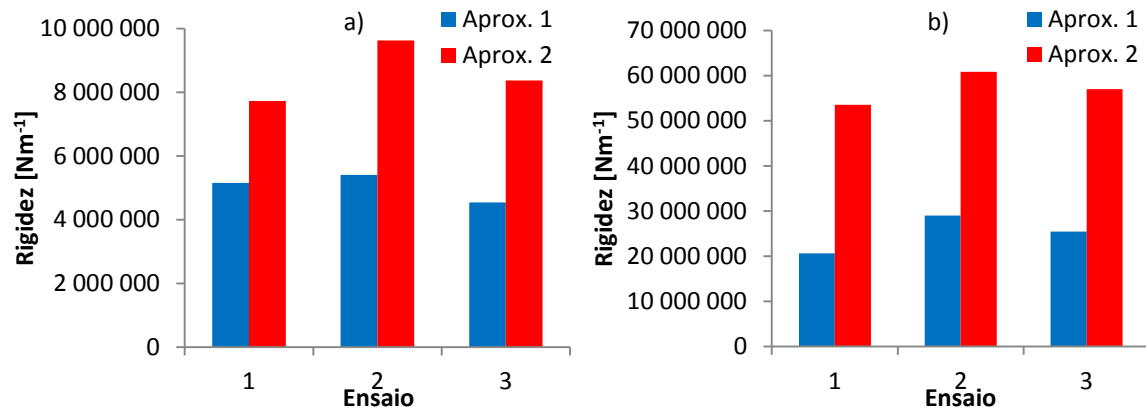


Figura 46 - Rigidez aproximada para cada ensaio: a) avanço; b) recuo.

Como se verifica pela análise dos dados apresentados, existe uma discrepância entre os valores de rigidez encontrados pelo método de aproximação 1 e os dados relativos ao método de aproximação 2. Esta diferença será discutida de seguida por análise da raiz do erro quadrático médio entre os dados experimentais e a equação de aproximação (68). É ainda de considerar a diferença existente entre os valores de rigidez obtidos para o movimento de avanço e para o movimento de recuo, podendo esta diferença estar relacionada com a assimetria de vedação do atuador.

Nos gráficos da figura seguinte são apresentados os dados relativos à raiz do erro quadrático médio (RMSE). Tal como no caso dos valores de rigidez existe uma baixa dispersão dos dados

relativos a cada aproximação para o avanço e para o recuo, o que é revelador da consistência dos dados experimentais recolhidos. Comparando a métrica do erro para cada um dos métodos de aproximação verifica-se que a nova metodologia desenvolvida consegue traduzir de forma mais precisa os dados experimentais, revelando-se de um ponto de vista da minimização do erro um procedimento mais correto e conducente a melhores resultados. Assim, do conjunto de valores obtidos pelas diferentes metodologias, apenas serão considerados para futuras apreciações os resultantes da segunda metodologia de aproximação.

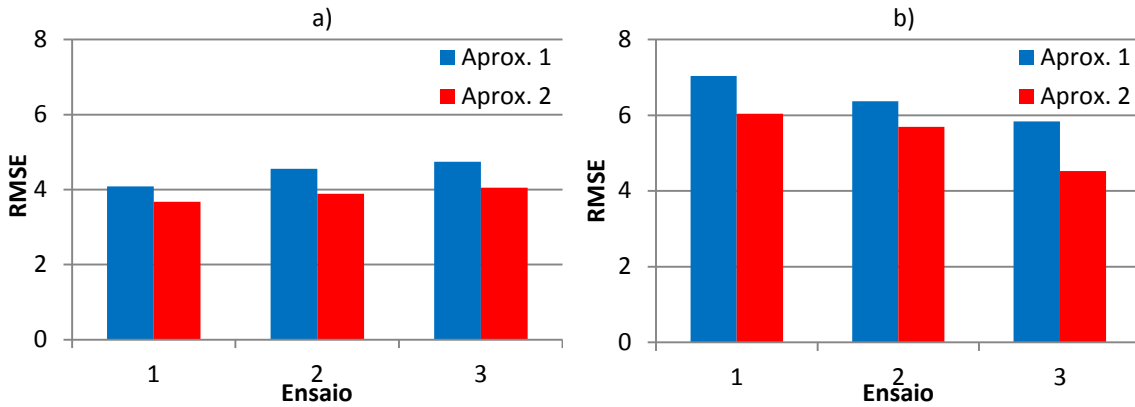


Figura 47 - RMSE relativo a cada ensaio: a) avanço; b) recuo.

Uma vez feitas estas aproximações e considerações, e dada a diferença nos valores de rigidez obtidos, torna-se necessário verificar se é possível incluir esta diferença no modelo através de um parâmetro de rigidez para o avanço e outro para o movimento de recuo. Tal como aconteceu com os parâmetros dinâmicos, uma possível solução para este problema passaria por fazer a distinção de parâmetros dinâmicos para o avanço e recuo, no entanto neste caso a separação torna-se mais complexa uma vez que tanto a rigidez com o amortecimento de pré-deslizamento (analisado na secção seguinte) não influenciam o valor da força de atrito através da velocidade, mas sim através da deformada  $z$  e da sua derivada temporal  $dz/dt$ . Revela-se assim uma tarefa complexa a definição de um critério de seleção entre os parâmetros identificados para o avanço e para o recuo pelo que, para efeitos de caracterização e posterior validação será tomado em consideração o valor médio do conjunto de valores obtidos, tanto no movimento de avanço como de recuo. Desta consideração resulta um valor para  $\bar{\sigma}_0$  de  $32862500 \text{ Nm}^{-1}$ . Note-se que do ponto de vista da caracterização do sistema esta hipótese assumida pode ter implicações ao nível da correta caracterização do comportamento de pré-deslizamento uma vez que a rigidez é à partida sobrestimada no caso do movimento de avanço e subestimada para o movimento de recuo. E este ponto deverá portanto ser alvo de atenção no procedimento de validação dos resultados obtidos.

#### 4.2.2 Amortecimento

Uma vez encontrados todos os parâmetros estáticos do modelo e a rigidez de pré-deslizamento, é então possível determinar o valor do segundo parâmetro dinâmico, admitindo como aproximação inicial um valor de  $\sigma_1$  constante. Este parâmetro pode ser determinado algebricamente por forma a garantir a passividade do modelo fora do domínio de pré-deslizamento [41], de acordo com a expressão seguinte.

$$\alpha_2 > \sigma_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \quad (69)$$

Contudo, em sistemas mecânicos onde não existe resolução de leitura das variáveis de estado capaz de caracterizar com rigor o comportamento do sistema em pré-deslizamento, a influência do amortecimento é menor, sendo mais importante garantir o amortecimento do sistema em pré-deslizamento, do que ajustar o seu valor a dados de posição pouco representativos [41]. Assim, é de uso corrente considerar para tal efeito uma razão de amortecimento superior a 1, sendo uma escolha típica  $\zeta = 1$  [41].

Pela definição de amortecimento crítico [42], e conhecida a massa do sistema, o coeficiente de amortecimento viscoso (atrito viscoso) e a rigidez, a razão de amortecimento vem dada pela equação (70).

$$\zeta = \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{2\sqrt{\sigma_0 \cdot M}} \quad (70)$$

Neste estudo considera-se que a situação crítica corresponde à menor razão de amortecimento, ou seja, a situação em que a massa do sistema é máxima (13,18 kg).

Após o cálculo do coeficiente de amortecimento  $\sigma_1$  e da respetiva razão de amortecimento para ambos os sentidos de movimento (dada a diferença nos parâmetros  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) verificou-se que, embora seja garantida a condição de passividade em *sliding*, não é garantido que o sistema é criticamente amortecido no regime de pré-deslizamento, sendo os valores da razão de amortecimento obtidos muito inferiores à unidade.

Verificou-se assim a impossibilidade de obter um amortecimento adequado em pré-deslizamento e passividade em *sliding*, tornando-se necessária uma mudança de abordagem. Considerou-se então um coeficiente de amortecimento variável com a velocidade, tal como apontado na equação (71) [41]. Assim, define-se uma função que permita a existência de um coeficiente de amortecimento de pré-deslizamento (para baixas velocidades) e um coeficiente de amortecimento em *sliding* (velocidades mais elevadas) que garanta a passividade do modelo neste regime. A parametrização sugerida na literatura para este coeficiente de amortecimento dependente da velocidade  $\sigma_1(\dot{x})$  é apresentada na equação (71), sendo os parâmetros  $\sigma_1'$  e  $v_c$  obtidos pelas expressões (72) e (73).

$$\sigma_1(\dot{x}) = \sigma_1' \cdot e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_c}\right)^2} \quad (71)$$

$$\sigma_1' = 2 \cdot \zeta \cdot \sqrt{\sigma_0 \cdot M} - \alpha_2 \quad (72)$$

$$v_c < 4 \cdot \sqrt{2 \cdot e} \cdot \frac{\alpha_0}{\sigma_1'} \quad (73)$$

Analizando as equações acima, e dado que foram já determinados os parâmetros estáticos para ambos os sentidos de movimento, assim como um parâmetro de rigidez médio válido para ambos os sentidos, revela-se necessário o cálculo dos parâmetros  $\sigma_1'$  e  $v_c$  para ambos os sentidos de movimento. Uma vez que  $v_c$  é também função de  $\sigma_1'$ , este parâmetro será determinado apenas após as considerações e decisões relativas ao parâmetro  $\sigma_1'$ .

Do cálculo para os parâmetros de recuo ( $\hat{\alpha}_2^-$  e  $\bar{\sigma}_0$ ) resulta que  $\sigma_1' = 41540 \text{ Nsm}^{-1}$ . Para os parâmetros de avanço ( $\hat{\alpha}_2^+$  e  $\bar{\sigma}_0$ ) vem que  $\sigma_1' = 41553 \text{ Nsm}^{-1}$ . Pelas razões já explanadas na secção anterior é necessário garantir valores de  $\sigma_1'$  (e também de  $v_c$ ) válidos para o movimento de avanço e de recuo. Uma vez que tanto os valores de  $\sigma_1'$  como os de  $v_c$  para os dois movimentos são muito próximos, a opção tomada passa por considerar a média dos valores de  $\sigma_1'$ . Assim  $\bar{\sigma}_1' = 41546,5 \text{ Nsm}^{-1}$ .

Relativamente ao parâmetro  $v_c$ , calculado o seu valor para o recuo ( $\hat{\alpha}_0^-$  e  $\bar{\sigma}_1'$ ) vem que  $v_c < 0,0024 \text{ ms}^{-1}$ , sendo que no avanço ( $\hat{\alpha}_0^+$  e  $\bar{\sigma}_1'$ ) resulta que  $v_c < 0,0029 \text{ ms}^{-1}$ . De forma a garantir a passividade do modelo em *sliding*, a escolha de  $v_c$  recai no menor valor dos obtidos:  $v_c = 0,0024 \text{ ms}^{-1}$ .

## 5 VALIDAÇÃO

Finalizado o processo de estudo e avaliação dos parâmetros do modelo de atrito que caracterizam o sistema em análise, é de relevante importância efetuar a devida validação dos resultados obtidos. Assim, no presente capítulo pretende-se efetuar um conjunto de testes ao modelo encontrado, por forma a verificar se este descreve (ou não) os fenómenos já descritos, como são o comportamento de pré-deslizamento e a dependência da força de descolamento com o gradiente de força aplicada, e outros comportamentos já abordados na secção 3.2.

O procedimento de validação do modelo encontrado passou pela simulação em ambiente *Simulink*® do comportamento da parte móvel do sistema, quando sujeito a uma força representativa da força motora, conforme representado na Figura 48 onde o comportamento do sistema é modelado por uma massa à qual é aplicada uma força motora. Para tal foi construído um diagrama de simulação que inclui a inércia representativa da massa, um bloco incluindo o modelo de atrito completo e dois integradores, por forma a obter as saídas de posição e velocidade do sistema (Figura 49). A força que efetivamente contribui para a aceleração do sistema móvel corresponde à diferença entre a força motora ( $F_m$ ) aplicada e a força de atrito ( $F_{atr}$ ) estimada em cada instante pelo modelo de atrito.

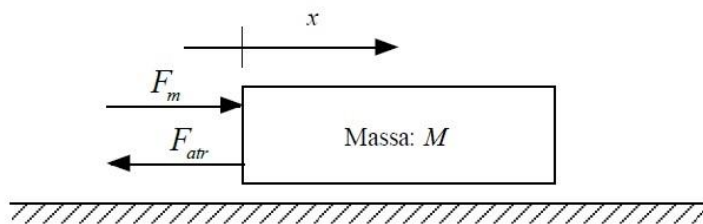


Figura 48 - Sistema de massa móvel utilizado para validação.

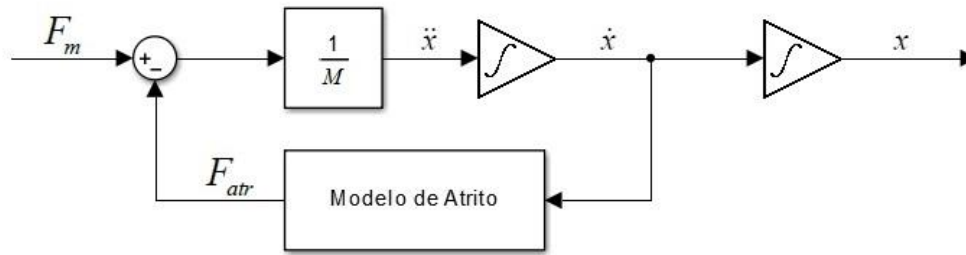


Figura 49 - Diagrama de blocos representativo do sistema móvel.

## 5.1 Simulações de Descolamento

Com vista à validação do modelo do ponto de vista do deslocamento de pré-deslizamento, bem como da amplitude da força de descolamento, foram realizadas simulações de descolamento da massa móvel, por variação da força motora a partir de zero e segundo uma rampa de declive constante. Foram ainda realizadas simulações de descolamento com vista à avaliação da capacidade do modelo obtido para descrever o fenómeno de decaimento da força de descolamento com o aumento do gradiente da rampa de força aplicada ao sistema. Nos pontos seguintes serão apresentados e analisados os resultados de simulação para cada caso, sendo daí retiradas as devidas conclusões.

### 5.1.1 Deslocamento de Pré-deslizamento e Força de Descolamento

Para avaliar a capacidade do modelo encontrado de descrever corretamente o movimento de pré-deslizamento e a força de descolamento do sistema móvel foram realizadas simulações para o movimento de avanço e de recuo. Para tal foi aplicada na entrada do diagrama de simulação uma rampa de força, com declive positivo ou negativo conforme se trata do movimento de avanço ou de recuo. Como nos ensaios experimentais apresentados na secção 4.1.2.1 e por forma a tornar os resultados das simulações comparáveis com os dados experimentais já recolhidos, a rampa de força aplicada possui um declive igual ao gradiente de força para o qual foram realizados os ensaios experimentais. A massa considerada corresponde à massa mínima do sistema (2,86 kg), uma vez mais por forma a replicar as condições de realização dos ensaios experimentais. Uma vez que se pretende avaliar a capacidade do modelo para descrever o comportamento em todo o regime de pré-deslizamento, os dados experimentais serão apresentados sob a forma de gráficos de força função do deslocamento, sendo para o seu traçado utilizados pares de pontos de força-deslocamento desde força nula e deslocamento nulo, até à força de descolamento e respetivo valor de deslocamento. De referir ainda que os dados de deslocamento apresentados são relativos ao sinal do *encoder*.

Assim os gráficos da Figura 50 e Figura 51 apresentam a sobreposição dos dados experimentais e de simulação de força função do deslocamento sofrido em todo o regime de pré-deslizamento.

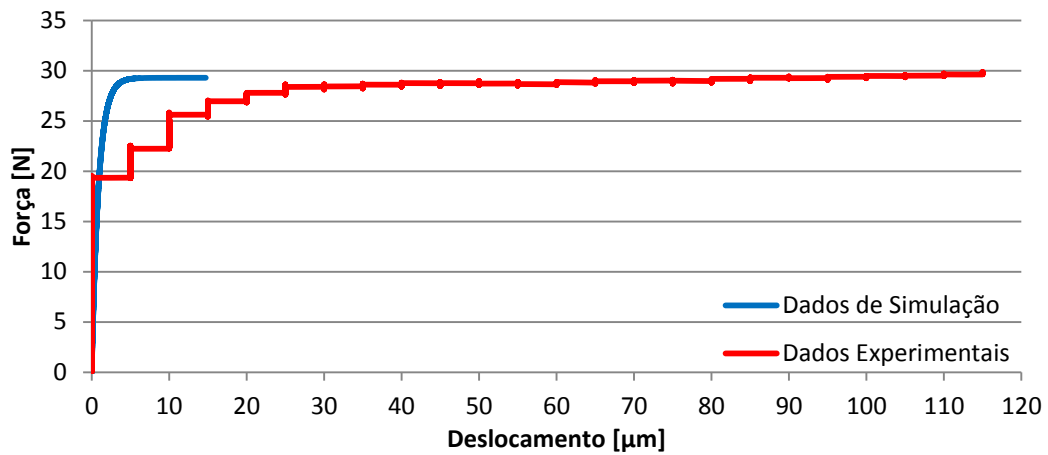


Figura 50 - Sobreposição de dados experimentais e de simulação para o movimento de pré-deslizamento (avanço).

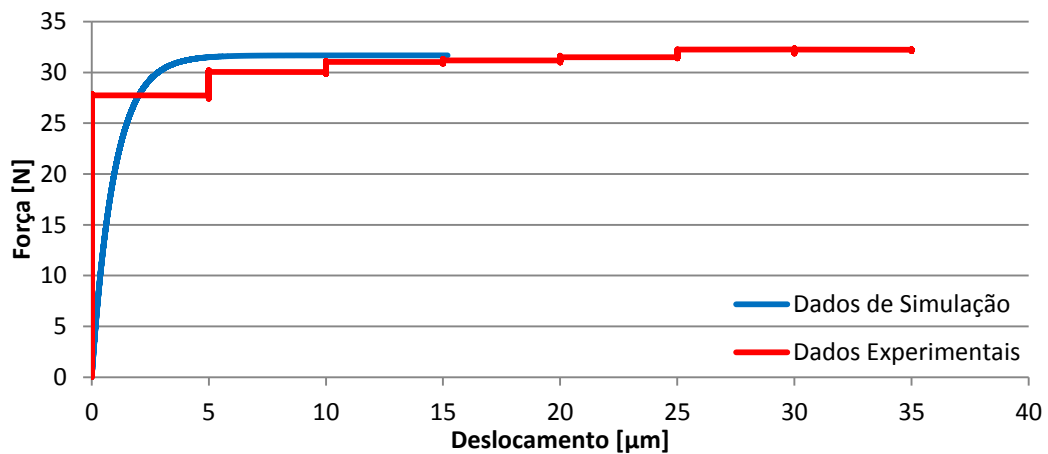


Figura 51 - Sobreposição de dados experimentais e de simulação para o movimento de pré-deslizamento (recuo).

Tal como se verifica por análise de ambos os gráficos, a previsão da força de descolamento é diferente para o avanço e para o recuo, indo de encontro aos valores identificados para os parâmetros estáticos  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  cuja soma representa a força de descolamento. Estes valores encontram-se também em concordância com os valores da força de descolamento evidenciados pelos dados experimentais apresentados.

Relativamente ao deslocamento de pré-deslizamento verifica-se uma disparidade entre os dados experimentais e os dados de simulação, disparidade esta mais evidente no caso do movimento de avanço. Verifica-se ainda uma igualdade nos deslocamentos de pré-deslizamento previstos por simulação para ambos os sentidos. Este facto estará relacionado com a escolha de um coeficiente de rigidez  $\sigma_0$  igual para ambos os sentidos de movimento. No entanto, para ambos os casos o deslocamento no regime em estudo revela-se inferior ao verificado experimentalmente, indiciando uma sobrestimação do parâmetro de rigidez  $\sigma_0$  para ambos os sentidos de movimento, ao contrário do previsto na secção 4.2.1.4.

### 5.1.2 Dependência com o Gradiente da Rampa de Força Aplicada

A dependência da força de descolamento com o gradiente da rampa de força aplicada foi um dos fenômenos estudados e observados experimentalmente. Com vista a verificar a inclusão deste fenômeno pelo modelo de atrito, foram efetuadas simulações de descolamento. Estas simulações realizaram-se para o movimento de avanço sendo o gráfico da Figura 52 representativo dos resultados encontrados por este método e dos valores experimentais já obtidos. Note-se que os dados experimentais representados correspondem aos apresentados na Figura 38, mas neste caso em escala logarítmica por forma a facilitar a comparação com os dados de simulação. Por análise da figura Figura 52, verifica-se então que a identificação feita não conduz à inclusão deste fenômeno no modelo de atrito. Estudos apresentados por Henrik Olsson (1996) [13] indicam que este modelo de atrito é capaz de caracterizar o fenómeno apresentado, no entanto a demonstração é feita pelo autor ajustando vários parâmetros simultaneamente, inclusivamente parâmetros estáticos como a velocidade de Stribeck. Pode-se então concluir que, embora o modelo de atrito tenha capacidade para incluir este decaimento da força de descolamento com o gradiente de força aplicada, os parâmetros identificados não conduziram a este resultado. No caso de se pretender incluir este fenómeno poder-se-á ajustar os parâmetros para esse fim, sendo de esperar a perda de capacidade de previsão noutros fenómenos, como será a curva estática de atrito (no caso do parâmetro ajustado ser a velocidade de Stribeck).

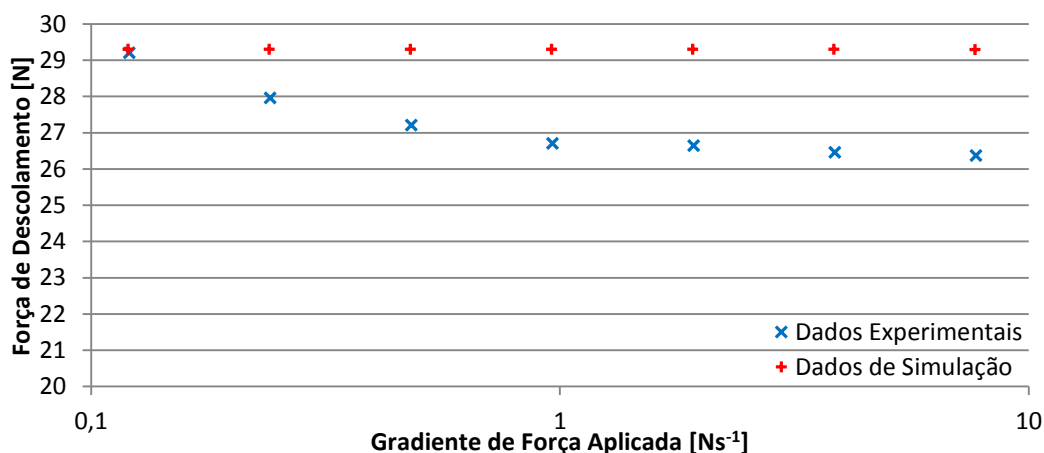


Figura 52 - Representação da força de descolamento obtida experimentalmente e via simulação para diferentes gradientes de força aplicada.

## 5.2 Ciclos de Variação da Força Motora em Pré-Deslizamento

Podendo o modelo de LuGre ser visto como uma combinação do modelo de atrito de Dahl com características de regime permanente como o efeito de Stribeck [43], tornou-se interessante estudar o comportamento do cilindro pneumático quando sujeito a ciclos de variação da força motora abaixo da força de descolamento. Assim, foram realizados ensaios experimentais onde, utilizando o mesmo *setup* da secção 4.2.1.1, a tensão aplicada às válvulas reguladoras de pressão foi variada sob a forma de uma onda *seno* de muito baixa frequência, por forma a desprezar as forças devidas à inércia do



sistema. Estes ensaios foram efetuados para valores de força aplicada positivos e negativos, com valor médio em torno de zero. Foram também realizados ensaios do mesmo tipo mas para valores de força aplicada exclusivamente positivos. Dado que os deslocamentos sofridos nestes ensaios se encontram dentro da gama de medição do LVDT já utilizado, foram apenas contabilizados os dados de deslocamento fornecidos por este, não sendo utilizada a informação de posição proveniente do *encoder*.

Por forma a analisar a capacidade do modelo de LuGre (com os parâmetros determinados) descrever os fenómenos observados, foram efetuadas simulações tal como na secção anterior. Nos pontos seguintes serão apresentados os resultados obtidos experimentalmente e os resultados de simulação, sendo efetuada uma análise comparativa desses resultados.

### 5.2.1 Média da Força Aplicada Aproximadamente Nula

Para a obtenção de dados experimentais de força e deslocamento relativos à variação da força motora aplicada, a tensão aplicada às válvulas reguladoras de pressão foi variada segundo uma onda *seno* com uma frequência de  $0,0075 \text{ rads}^{-1}$  e baixa amplitude, o que resultou num sinal de força aplicada sinusoidal com a mesma frequência e uma amplitude de aproximadamente 20 N. O gráfico da Figura 53 mostra o mapeamento da força aplicada, i.e. força de atrito uma vez que novamente se desprezam as forças devidas à inércia, função do deslocamento sofrido pelo conjunto móvel para três ciclos consecutivos de variação de força.

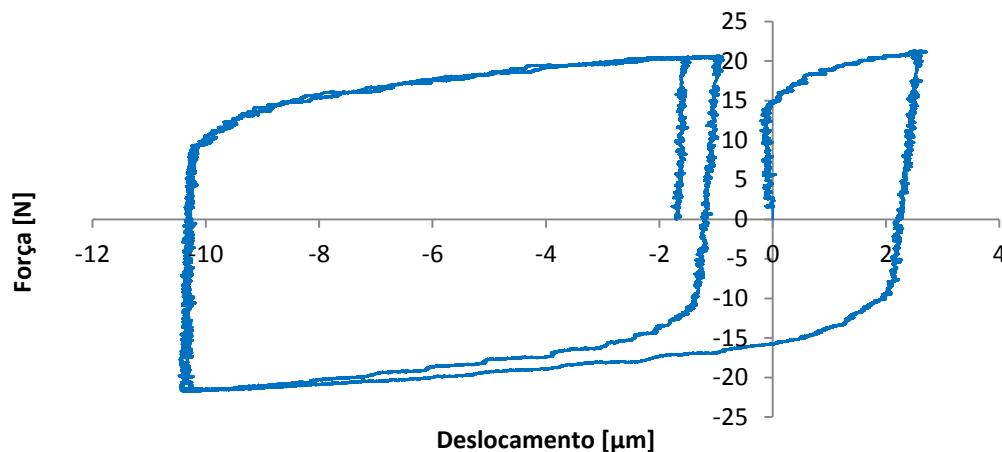


Figura 53 - Dados experimentais de força de atrito função do deslocamento.

Como se verifica por análise do gráfico acima, existe uma clara diferença de deslocamento entre o primeiro ciclo de variação de força e os restantes. Isto dever-se-á a uma acomodação do vedante e cintas de guiamento à caixa de vedação e guiamento pelo que para efeitos de análise da descrição do comportamento, serão levados em consideração apenas os restantes dois ciclos de variação de força. Como se verifica, não existe praticamente recuperação elástica durante o processo de

descarregamento, sendo a derivada da curva na interseção com o eixo das abcissas (rigidez na definição de Dahl) muito elevada. Do ponto de vista dos deslocamentos sofridos, verifica-se uma simetria entre o carregamento para forças de sinal positivo e forças de sinal negativo. Verifica-se ainda, pela diferença entre o segundo e o terceiro ciclos de variação de força, uma tendência à existência de *drift* no sentido negativo do movimento.

Para efeitos de simulação foi colocada na entrada do diagrama de simulação uma onda *seno* de amplitude 21 N e uma frequência de  $0,0075 \text{ rads}^{-1}$ , deslocada segundo o eixo das ordenadas -0,5 N, por forma a replicar o melhor possível as leituras de força obtidas a partir dos dados experimentais. O gráfico da figura seguinte apresenta o mapeamento dos dados de simulação de força de atrito função do deslocamento. Como se verifica, apesar do modelo de atrito com os parâmetros encontrados ser capaz descrever ciclos de variação de força vs. deslocamento sofrido, este não replica os fenómenos que se verificam experimentalmente, como a inexistência de retorno elástico e a elevada derivada no ponto de interseção da curva de força-deslocamento com o eixo das ordenadas. No entanto, verifica-se o fenómeno de *drift* (relacionado com a assimetria da variação de força aplicada), embora numa escala bastante reduzida. Conforme se pode verificar, os deslocamentos previstos pelo modelo de atrito são muito inferiores aos verificados experimentalmente, realçando a eventual sobrestimação do valor do parâmetro  $\sigma_0$ .

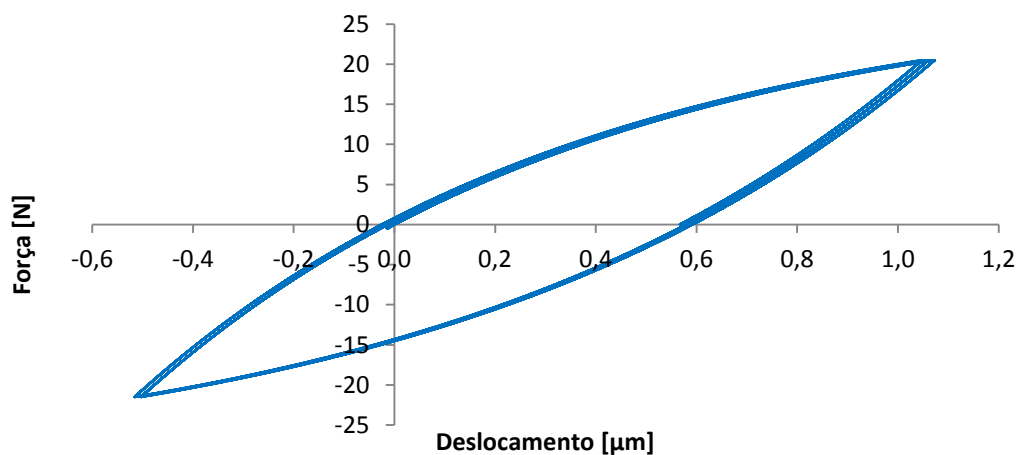


Figura 54 - Dados de simulação de força de atrito função do deslocamento.

### 5.2.2 Força Aplicada Exclusivamente Positiva

Uma vez verificada experimentalmente a recuperação elástica residual que se evidenciou no ponto anterior, e tendo em conta fenómenos já descritos na literatura e associados a ciclos de variação da força aplicada sempre do mesmo sinal, revela-se interessante do ponto de vista do estudo do atrito em pré-deslizamento, a verificação do comportamento do sistema nestas condições. Assim, foi realizado um ensaio experimental de variação da força aplicada desde um valor positivo e próximo de zero, até uma força de cerca de 20 N. Para tal, foi seguida a metodologia do ponto anterior, sendo que a amplitude da onda *seno* aplicada no sinal de referência das válvulas reguladoras de pressão, bem

como o seu período, foram reduzidos a metade. Foi ainda adicionada ao sinal uma componente constante e igual à amplitude da onda seno e especificado um atraso de fase de  $\pi/2$  rad, permitindo variar a força aplicada ao sistema desde um valor mínimo e próximo de zero até um valor em torno de 20 N. Do mapeamento dos dados experimentais recolhidos para a força aplicada e o deslocamento do conjunto móvel resulta o gráfico apresentado na Figura 55.

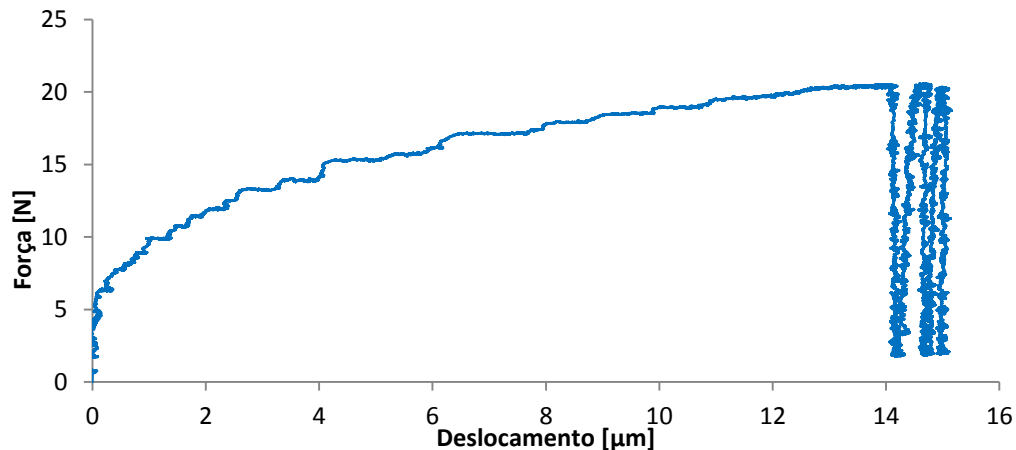


Figura 55 - Dados experimentais de força de atrito função do deslocamento.

Como se verifica por análise da Figura 55, para além da recuperação elástica residual, existe uma evidente diminuição do deslocamento sofrido pelo sistema em cada ciclo de variação da força aplicada. Este fenómeno corresponde ao efeito de memória não local (*nonlocal memory effect*) referenciado na literatura mais recente sobre o tema do atrito [43-45]. Jan Swevers *et al.* (2000) [43], numa crítica ao modelo de LuGre, referem que este, tal como o modelo de Dahl, não é capaz de incluir a relação de histerese (*hysteresis-like behaviour*) entre a força de atrito e o deslocamento sofrido em pré-deslizamento quando o ciclo de força aplicada possui um valor médio diferente de zero. Tendo como objetivo a verificação dos factos relatados na literatura, foi realizada uma simulação do modelo de atrito para as condições do ensaio experimental. Assim na entrada do diagrama de simulação foi colocada uma onda *seno* com uma amplitude de 9,25 N, frequência de 0,015 rads<sup>-1</sup>, uma translação vertical de 11,15 N e um atraso de fase de  $\pi/2$  rad. Desta simulação resultaram os dados apresentados no gráfico da Figura 56. Como se verifica, de facto este efeito de memória não local não é captado pelo modelo de LuGre, sendo o deslocamento sofrido pelo elemento móvel constante em cada ciclo de variação de força.

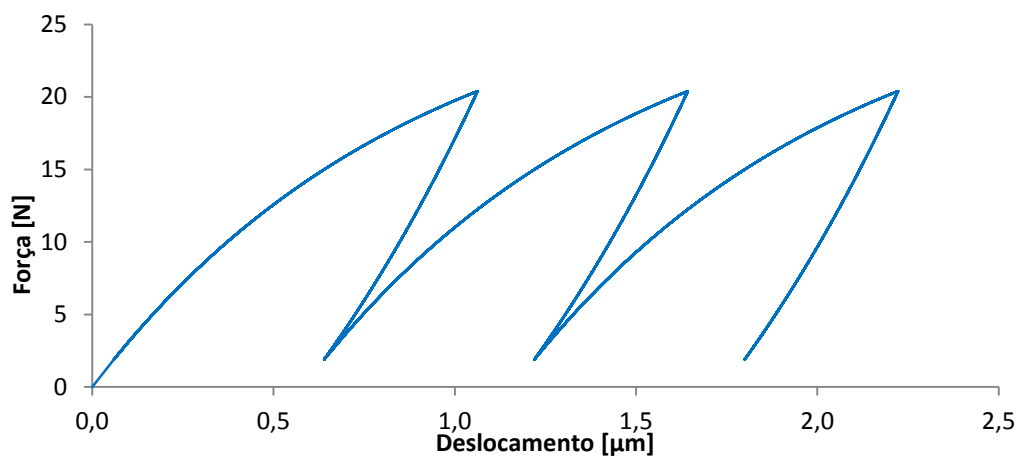


Figura 56 - Dados de simulação de força de atrito função do deslocamento.

Feita esta validação e respetiva análise de resultados, no capítulo seguinte serão apresentadas as conclusões finais acerca do trabalho desenvolvido, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 6 CONCLUSÕES

---

Os servossistemas pneumáticos constituem cada vez mais uma alternativa real para acionamento de cargas médias, com velocidades e acelerações elevadas. No entanto, estes apresentam dificuldades associadas ao controlo de posição e seguimento de trajetórias. Estas dificuldades estão relacionadas com não linearidades evidenciadas por este tipo de sistemas, nomeadamente no que diz respeito ao atrito entre os componentes móveis do sistema e os seus elementos de vedação. Assim, torna-se importante uma correta e precisa modelação de atrito, de modo a incluir nos controladores de sistemas pneumáticos uma eventual previsão ou compensação das forças de atrito existentes. Estes factos constituíram a motivação para este trabalho, que teve por objetivo a modelação da força de atrito num servomecanismo pneumático, representativo das aplicações industriais para as quais são vocacionados este tipo de sistemas de acionamento. Pretendia-se ainda que o modelo de atrito utilizado constituísse um ponto de inovação e avanço relativamente ao modelo (estático) até então utilizado para previsão de atrito no servomecanismo em estudo. Assim, a escolha recaiu sobre o modelo de atrito de LuGre, modelo dinâmico que combina características de pré-deslizamento, com características estáticas do atrito.

Após o estudo dos mecanismos do atrito, dos fenómenos experimentais documentados na literatura e das metodologias de estimação de parâmetros utilizadas, foram realizados um conjunto de ensaios experimentais que permitiram a recolha de dados com vista à estimação dos parâmetros do modelo de atrito de LuGre. Para além da determinação de parâmetros, as experiências realizadas permitiram ainda a verificação da existência, no servossistema pneumático, dos fenómenos descritos na literatura. No que toca a fenómenos estáticos, foi possível verificar e caracterizar a curva de atrito em regime permanente (i.e. velocidade constante), com identificação da força de atrito de Coulomb, da força de descolamento, da velocidade de Stribeck e ainda do coeficiente de atrito viscoso. Relativamente aos fenómenos característicos da dinâmica de pré-deslizamento, foram observados comportamentos como a dependência da força de descolamento relativamente ao gradiente de força aplicada ao sistema, bem como ciclos de histerese de força vs. deslocamento sofrido em pré-deslizamento.

A validação da parametrização encontrada para o modelo de atrito permitiu concluir que as metodologias seguidas para a avaliação da rigidez das fibras conduziram a um valor sobrestimado deste parâmetro. Isto veio confirmar o mencionado em alguma da literatura sobre o tema, que refere que os parâmetros dinâmicos do modelo devem ser determinados empiricamente e caso a caso, por forma a captar os fenómenos considerados mais relevantes do ponto de vista da previsão do atrito para a aplicação. No procedimento de validação foi ainda verificada experimentalmente a existência do chamado efeito de memória não local, fenómeno este não captado pelo modelo de atrito de LuGre.

Para além dos fenómenos associados ao atrito, foram ainda verificadas dependências entre os parâmetros do modelo e a pressão, neste ponto foram tidas em conta hipóteses simplificativas, mas será interessante em trabalhos futuros estudar de forma mais concreta estas dependências, caracterizando as relações existentes com vista a uma possível inclusão destas no modelo de atrito.

No decorrer dos procedimentos experimentais, a resolução do sistema na medição de posição revelou-se um ponto de limitação para a caracterização e implementação do modelo. No entanto, do ponto de vista da previsão *offline* da força de atrito, o modelo encontrado revela-se como um avanço relativamente ao já existente, na medida que permite efetivamente a caracterização da força de atrito em toda a gama de velocidade, incluindo velocidade nula.

Numa perspetiva de trabalhos futuros, seria ainda interessante efetuar uma caracterização da rigidez das fibras (e consequentemente do seu amortecimento) por forma a ajustar o comportamento do modelo simulado para ciclos de variação da força motora em torno de força nula, nomeadamente no que toca à amplitude de deslocamento verificada experimentalmente. Seria ainda de abordar uma possível modificação do modelo parametrizado por forma a descrever o efeito de memória não local, ou como alternativa considerar a mudança para um modelo de atrito mais complexo mas que permita a captação deste fenómeno.

## 7 REFERÊNCIAS

---

1. Hesse, S., *99 Examples of Pneumatic Applications*. 2000: Blue Digest on Automation.
2. Rocha, J.A.D.d., *Determinação dos parâmetros do modelo de Karnopp num sistema servopneumático*, in *Engenharia Mecânica* 2010, Universidade do Porto: Faculdade de Engenharia.
3. Moreira, L.C.F., *Caracterização experimental de um atuador pneumático de baixo atrito*, in *Engenharia Mecânica* 2012, Universidade do Porto: Faculdade de Engenharia.
4. Amaral, V.H.T., *Controlo Linear de um Servoactuador Pneumático*, in *Engenharia Mecânica* 2008, Universidade do Porto: Faculdade de Engenharia.
5. Carneiro, J.P.B.d.R.F., *Modelação e controlo de actuadores pneumáticos utilizando redes neuronais artificiais*, in *Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial* 2007, Universidade do Porto: Faculdade de Engenharia.
6. Thomas, M.B., *Advanced Servo Control of a Pneumatic Actuator*, 2003, Ohio State University.
7. FESTO, *Proportional Directional Control Valves MPYE*. 2009.
8. Asco-Joucomtic, *High Performance Cylinders, Double Acting, ISO 15552-AFNOR ISO 15552- DIN ISO 15552, Series 450-453, PES OMEGA*.
9. Quintas, M.R., *Contribution a la Modelisation et a la Commande Robuste des Systemes Electrohydrauliques*, in *Laboratoire d'Automatique Industrielle* 1999: Institut National des Sciences Appliquees de Lyon.
10. Lopes, A.M.F.M., *Um Dispositivo Robótico para Controlo de Força-Impedância de Manipuladores Industriais*, in *Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial* 1999, Universidade do Porto: Faculdade de Engenharia.
11. *ISO 6358 Standart, Pneumatic fluid power - Components using compressible fluids - Determination of the flow-rate characteristics*, 1989, International Organization of Standardization.
12. Munson, B.R., et al., *Fundamentals of Fluid Mechanics*. 6 ed. 2009.
13. Olsson, H., *Control Systems with Friction*, in *Department of Automatic Control* 1996: Lund Institute of Technology.
14. Åström, K.J., *Control of Systems with Friction*. Proceedings of the 4th International Conference on Motion and Vibration Control, 1998.
15. Abebe, W.N., *Simulated and Experimental Sliding Mode of a Hydraulic Positioning System Control*, 2006, University of Akron.
16. Amonton, G., *On the resistance originating in machines*. Proc. of the French Royal Academy of Sciences, 1699: p. 206–222.

17. Coulomb, C.A.d., *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties, et la roideur des cordages*. Mém. Math. Phys., 1785. **X**: p. 161-342.
18. Olsson, H., et al., *Friction Models and Friction Compensation*. European Journal of Control, 1998. **4**.
19. Rabinowicz, E., *The Nature of the Static and Kinetic Coefficients of Friction*. Journal of Applied Physics, 1951. **22**.
20. Rabinowicz, E., *The Intrinsic Variables affecting the Stick-Slip Process*. Proceedings of the Physical Society, 1958. **71**(4): p. 668.
21. Johannes, V.I., M.A. Green, and C.A. Brockley, *The role of the rate of application of the tangential force in determining the static friction coefficient*. Wear, 1973. **24**(3): p. 381-5.
22. Richardson, R.S.H. and H. Nolle, *Surface friction under time-dependent loads*. Wear, 1976. **37**(1): p. 87-101.
23. Courtney-Pratt, J.S. and E. Eisner, *The Effect of a Tangential Force on the Contact of Metallic Bodies*. Proceedings of the Royal Society of London, 1957. **238**: p. 529-550.
24. Hess, D.P. and A. Soom, *Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities*. American Society of Mechanical Engineers, 1989.
25. Morin, A.J., *New friction experiments carried out at Metz in 1831–1833*. Proceedings of the French Royal Academy of Sciences, 1833. **4**: p. 1-128.
26. Armstrong-Hélouvry, B., *Control of Machines With Friction*. 1991: Kluwer.
27. Armstrong-Hélouvry, B., P. Dupont, and C.C.d. Wit, *A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines*. Automation, 1994. **30**: p. 1083-1138.
28. Wit, C.C.d., *Robust control for servo-mechanisms under inexact friction compensation*. Automatica, 1993. **29**(3): p. 757-761.
29. Karnopp, D., *Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1985. **107**(1): p. 100-103.
30. Dahl, P.R., *A Solid Friction Model*, TOR-0158(3107-18)-1, Editor 1968, The Aerospace Corporation.
31. Haessig, D.A. and B. Friedland. *On the Modeling and Simulation of Friction*. in *American Control Conference, 1990*. 1990.
32. Wit, C.C.d., et al., *Dynamic Friction Models and Control Design*. Proceedings of the 1993 American Control Conference, 1993. **2**: p. 1920-1926.
33. Wit, C.C.d., et al., *A New Model for Control of Systems with Friction*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995. **40**.
34. Wit, C.C.d. and P. Lischinsky, *Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1997. **11**: p. 65-80.
35. Wenjing, Z., *Parameter Identification of LuGre Friction Model in Servo System Based on Improved Particle Swarm Optimization Algorithm*. Proceedings of the 26th Chinese Control Conference, 2007: p. 135-139.
36. Meng, D., et al., *Modeling of a Pneumatic System for High-Accuracy Position Control*. International Conference on Fluid Power and Mechatronics, 2011: p. 505-510.
37. Hensen, R.H.A., M.J.G.v.d. Molengraft, and Maarten Steinbuch, *Frequency Domain Identification of Dynamic Friction Model Parameters*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002. **10**: p. 191-196.
38. Ai-qing, H., et al., *Research of Dynamic Parameter Identification of LuGre Model Based on Weights Boundary Neural Network*. 2011 International Conference on Computer and Automation Engineering, 2012. **44**.



39. Andrighetto, P.L., A.C. Valdiero, and L. Carlotto, *Study of the Friction Behavior in Industrial Pneumatic Actuators*. ABCM Symposium Series in Mechatronics, 2006. **2**: p. 369-376.
40. Carneiro, J.F. and F.G.d. Almeida, *Using two servovalves to improve pneumatic force control in industrial cylinders*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013. **66**(1-4): p. 283-301.
41. Åström, K.J. and C.C.d. Wit, *Revisiting the LuGre Model - Stick-Slip Motion and Rate Dependence*. IEEE Control Systems Magazine, 2008. **28**(6): p. 101-114.
42. Rodrigues, J.D., *Apontamentos de Vibrações de Sistemas Mecânicos*, 2013, Faculdade de Engenharia: Universidade do Porto.
43. Swevers, J., et al., *An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behavior for Accurate Friction Compensation*. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, 2000. **45**(4): p. 675-686.
44. Al-Bender, F., V. Lampaert, and J. Swevers, *The Generalized Maxwell-Slip Model: A Novel Model for Friction Simulation and Compensation*. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, 2005. **50**(11): p. 1883-1887.
45. Lampaert, V., F. Al-Bender, and J. Swevers, *A Generalized Maxwell-Slip Friction Model Appropriate for Control Purposes*. IEEE, 2003: p. 1170-1177.